

Практичне заняття №7

з курсу «Сигнали і процеси»

Задача 1.

Знайти частотний коефіцієнт передачі для кола, показаного на рис. 1.

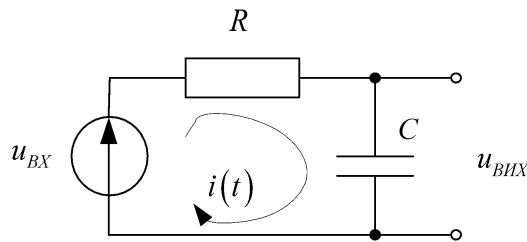


Рис. 1

Рішення

Як позначається частотний коефіцієнт передачі?

Частотний коефіцієнт передачі – $\dot{K}(j\omega)$.

Будемо користуватися методом комплексних амплітуд (ви повинні його пам'ятати з курсу «Основи теорії кіл»). Згідно цього методу

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{u}_{вих}(\omega)}{\dot{u}_{вх}(\omega)},$$

де $\dot{u}_{вих}(\omega)$ та $\dot{u}_{вх}(\omega)$, відповідно, комплексні амплітуди напруги на виході та на вході кола. Комплексні амплітуди враховують як амплітуду гармонійного коливання, так і його фазу.

Нагадаю, що за методом комплексних амплітуд кожен елемент представляється у вигляді комплексного опору, який (в загальному випадку) залежить від частоти (див. табл. 1).

Табл. 1.

Елемент	Комплексний опір
Опір R	R
Ємність C	$\frac{1}{j\omega C}$
Індуктивність L	$j\omega L$

В нашому випадку (рис. 1) $\dot{u}_{вих}(\omega) = i \cdot \frac{1}{j\omega C}$, $\dot{u}_{вх}(\omega) = i \cdot \left(\frac{1}{j\omega C} + R \right)$, тоді

$$\begin{aligned} \dot{K}(j\omega) &= \frac{i \cdot \frac{1}{j\omega C}}{i \left(\frac{1}{j\omega C} + R \right)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega CR}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega CR}{j\omega C}} = \\ &= \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega CR}. \end{aligned}$$

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}.$$

Відповідь: частотний коефіцієнт RC-кола має вигляд

Задача 2.

Покажіть як буде виглядати АЧХ RC-кола, показаного на рис.1.

Рішення

Як визначити АЧХ кола при відомому $K(j\omega)$?

Як відомо, АЧХ кола це модуль ЧКП, тобто $|K(j\omega)|$. З математики відомий вираз $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, де z – довільне комплексне число. Відповідно,

$$K(j\omega) = \left| \frac{1}{1 + j\omega CR} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega CR|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad (1)$$

Спробуйте зобразити графічно цю АЧХ.

Очевидно, що чим далі значення кутової частоти ω від нуля, тим більший знаменник у виразі (1) і, відповідно, менше сам вираз. Це означає, що ми маємо справу з фільтром нижніх частот (ФНЧ). АЧХ приблизно показано на рис. 3.

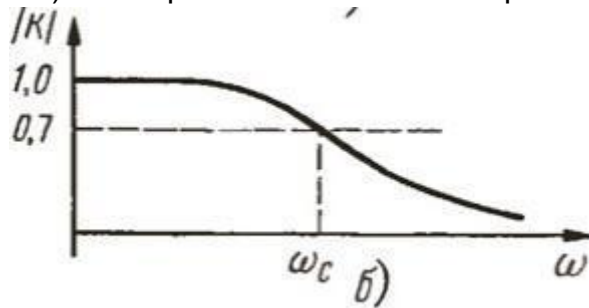


Рис. 3

Задача 3.

Тепер роздивимось метод диференціальних рівнянь. Для прикладу візьмемо RC-коло (рис. 1).

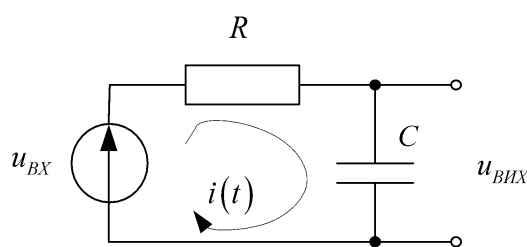


Рис. 1

$$\begin{aligned} a_{BHX} \frac{d^n U_{BHX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BHX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BHX}}{dt} + a_0 U &= \\ = b_{BX} \frac{d^m U_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU_{BX}}{dt} + b_0 U \end{aligned}$$

Запишемо для нього диференціальне рівняння на основі законів з теорії кіл.

У відповідності до другого закону Кірхгофа сума падінь напруг в контурі дорівнює сумі ЕРС, які діють в контурі.

Скільки у нас ЕРС? Скільки падінь напруги?
у нас

$$u_{BX} = u_R + u_{BHX} = i(t)R + u_{BHX}.$$

Чому дорівнює струм через ємність $i(t)$?

Струм в такому колі дорівнює $i(t) = C \frac{du_{BHX}}{dt}$ (тому, що вихідну напругу знімаємо з конденсатора).

Тоді

$$u_{BX} = RC \frac{du_{BHX}}{dt} + u_{BHX},$$

$$RC \frac{du_{BHX}}{dt} + u_{BHX} = u_{BX}$$

$$a_{BHX} \frac{d^n U_{BHX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BHX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BHX}}{dt} + a_0 U =$$

$$= b_{BX} \frac{d^m U_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU_{BX}}{dt} + b_0 U.$$

$$\tau \frac{du_{BHX}}{dt} + u_{BHX} = u_{BX}$$

– диференціальне рівняння, де $\tau = RC$ – постійна часу RC-кола.

Отримане ДУ – це лінійне ДР першого порядку, тобто RC-коло є динамічною системою першого порядку. Постійна часу такого кола є найважливішою його характеристикою. Вона визначає часовий масштаб протікання процесів у колі. Чим більша τ , тим довше відбуваються всі процеси (заряд-розряд конденсатора).

Для зручності ДР зазвичай записують так, щоб при найбільшому порядку диференціювання множник дорівнював одиниці (канонічна форма), тобто

$$\frac{du_{BHX}}{dt} + \frac{1}{\tau} u_{BHX} = \frac{1}{\tau} u_{BX},$$

тоді коефіцієнти ДР

$$a_1 = 1, \quad a_0 = \frac{1}{\tau}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau}.$$

Диференціальне рівняння можна записати, виходячи з виразу для частотного коефіцієнта передачі (ЧКП) $K(j\omega)$, для RC-кола ми його вже знайшли. Ми знаємо, що коефіцієнти передачі, отримані різними методами для одного й того ж кола, відрізняються тільки видом

оператора: метод ПФ – оператор $p = j\omega$; метод ПЛ – $p = \sigma + j\omega$; метод ДР – $p = \frac{d}{dt}$. Тобто

$K(p)$ можна записати, якщо замінити в ЧКП оператор $j\omega$ на оператор $\frac{d}{dt}$.

Як буде виглядати $K(p)$ для RC-кола?

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$K(p) = \frac{1}{1 + pCR}$$

Примітка! Ми можемо зробити заміну $p = j\omega$ при переході від $K(j\omega)$ до $K(p)$, але у зворотному напрямку (від $K(p)$ до $K(j\omega)$) це вірно не завжди. Так як функція $K(p)$ (перетворення Лапласа від імпульсної характеристики кола $h(t)$) може існувати для даного кола, а $K(j\omega)$ (перетворення Фур'є від $h(t)$) – ні. Такий варіант можливий для системи, для

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt < \infty$$

якої не виконується умова (це буде не стійка система).

Розгляд в загальному випадку переходу від образу за Лапласом до спектральної щільності наведений в Додатку 1 підручника Гоноровського (1986).

Запишемо ДР

$$u_{ВИХ}(t) = K(p)u_{ВХ}(t)$$

$$u_{ВИХ}(t) = \frac{1}{(1 + pRC)} u_{ВХ}(t)$$

$$u_{ВИХ}(t)(1 + pRC) = u_{ВХ}(t)$$

$$pRCu_{ВИХ}(t) + u_{ВИХ}(t) = u_{ВХ}(t)$$

$$\tau \frac{du_{ВИХ}(t)}{dt} + u_{ВИХ}(t) = u_{ВХ}(t)$$

$$\frac{du_{ВИХ}}{dt} + \frac{1}{\tau} u_{ВИХ} = \frac{1}{\tau} u_{ВХ},$$

тоді коефіцієнти ДР

$$a_1 = 1, \quad a_0 = \frac{1}{\tau}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau}.$$

Отримали аналогічні результати методом ОТК та через ЧКП.

Задача 4.

Запишіть функцію передачі $K(p)$ для RC – кола для конкретних номіналів елементів: $R = 10$ кОм, $C = 1$ мкФ.

Для переходу від частотного коефіцієнта передачі $K(j\omega)$ до функції передачі $K(p)$

необхідно зробити заміну $p = j\omega$. Тоді $K(p) = \frac{1}{1 + pCR}$.

Підставимо значення номіналів:

$$R = 10 \text{ кОм} = 10^4 \text{ Ом},$$

$$C = 1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Отримаємо
$$K(p) = \frac{1}{1 + pCR} = \frac{1}{1 + p10^{-6}10^4} = \frac{1}{1 + p \cdot 10^{-2}}.$$

Задача 5.

Роздивимось паралельний коливальний контур (рис. 2) та проаналізуємо його методом ДР.

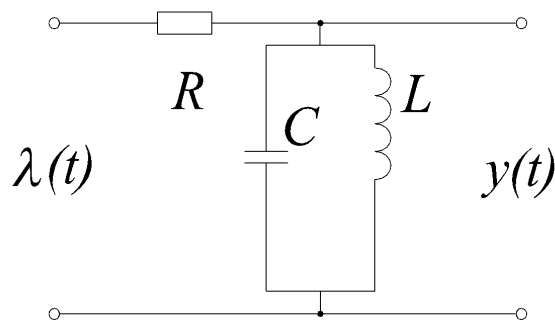


Рис. 2

$$K(p) = \frac{Y(p)}{\Lambda(p)}, p = \frac{d}{dt}.$$

Коефіцієнт передачі запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{Y(p)}{\Lambda(p)} = \frac{I(p) \cdot Z_{\text{вих}}}{I(p) \cdot Z_{\text{екв}}} = \frac{\frac{\frac{1}{pC} pL}{\frac{1}{pC} + pL}}{\left[R + \frac{\frac{1}{pC} pL}{\frac{1}{pC} + pL} \right]} = \\ &= \frac{\frac{\frac{1}{pC} pL}{\frac{1}{pC} + pL}}{\left[R \left(\frac{1}{pC} + pL \right) + \frac{1}{pC} pL \right]} = \frac{\frac{\frac{1}{pC} pL}{\frac{1}{pC} + pL}}{\frac{\frac{R}{pC} + pLR + \frac{1}{pC} pL}{\frac{1}{pC} + pL}} = \frac{\frac{1}{pC} pL}{\frac{R}{pC} + pLR + \frac{1}{pC} pL} \end{aligned}$$

Помножимо чисельник та знаменник на pC

$$\frac{\frac{1}{pC} pC}{\frac{R}{pC} \cdot pC + pLR \cdot pC + \frac{1}{pC} pL \cdot pC} = \frac{pL}{R + p^2 RLC + pL},$$

Зазвичай ДР записують так, щоб множник при найбільшому ступеню оператора дорівнював одиниці, для цього розділимо чисельник та знаменник на RLC , отримаємо

$$\frac{\frac{pL}{RLC}}{\frac{R}{RLC} + p^2 + \frac{pL}{RLC}} = \frac{\frac{p}{RC}}{\frac{1}{LC} + p^2 + \frac{p}{RC}} = \frac{2\eta p}{p^2 + 2\eta p + \omega_0^2}$$

де $\eta = \frac{1}{2RC}$ – коефіцієнт затухання, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансна частота.

Таким чином, ми отримали коефіцієнт передачі паралельного коливального контуру

$$K(p) = \frac{2\eta p}{p^2 + 2\eta p + \omega_0^2}.$$

Запишемо ДР

$$y(t) = K(p, t) \lambda(t),$$

$$y(t) = \frac{2\eta p}{p^2 + 2\eta p + \omega_0^2} \lambda(t),$$

$$y(t) [p^2 + 2\eta p + \omega_0^2] = 2\eta p \lambda(t),$$

$$p^2 y(t) + 2\eta p y(t) + \omega_0^2 y(t) = 2\eta p \lambda(t),$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\eta \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 2\eta \frac{d\lambda(t)}{dt}$$

$$y''(t) + 2\eta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 2\eta \lambda'(t)$$

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 \cdot 0 + b_1 \lambda'(t)$$

Запишемо коефіцієнти ДР

$$a_2 = 1, a_1 = 2\eta, a_0 = \omega_0^2, b_1 = 2\eta, b_0 = 0.$$

Для знаходження відклику необхідно розв'язати отримане рівняння при заданих початкових умовах одним з відомих методів.

Задача 6.

ЛСС описується диференціальним рівнянням

$$2y'(t) + \frac{1}{3} y(t) = 4x(t)$$

або

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{3} y(t) = 4x(t)$$

Знайдіть відповідну функцію передачі $K(p)$.

Рішення

Застосуємо двостороннє перетворення Лапласа до обох частин рівняння:

$$L\left\{2y'(t) + \frac{1}{3}y(t)\right\} = L\{4x(t)\}$$

при цьому позначимо $L\{y(t)\} = Y(p)$, $L\{x(t)\} = X(p)$, де $Y(p), X(p)$ – зображення за

Лапласом відповідно для $x(t)$ та $y(t)$ ($p = \frac{d}{dt}$).

Тоді

$$2pY(p) + \frac{1}{3}Y(p) = 4X(p)$$

Нам треба знайти $K(p)$, а ми знаємо, що $K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$, поділимо праву та ліву частини на $X(p)$

$$2p \frac{Y(p)}{X(p)} + \frac{1}{3} \frac{Y(p)}{X(p)} = 4 \frac{X(p)}{X(p)}$$

$$2p \frac{Y(p)}{X(p)} + \frac{1}{3} \frac{Y(p)}{X(p)} = 4$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} \left(2p + \frac{1}{3}\right) = 4$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{4}{2p + 1/3} = K(p)$$

$$K(p) = \frac{4}{2p + 1/3}$$

Задача 7.

ЛСС описується функцією передачі $K(p) = \frac{2p-4}{(p+3)(p+1)}$. Запишіть диференціальне рівняння для цієї системи.

Рішення

Будемо діяти у зворотному напрямку до попередньої задачі

$$K(p) = \frac{2p-4}{p^2 + 4p + 3}$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2p-4}{p^2 + 4p + 3}$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} X(p) = \frac{2p-4}{p^2+4p+3} X(p)$$

$$Y(p) = \frac{2p-4}{p^2+4p+3} X(p)$$

$$Y(p)(p^2+4p+3) = \frac{2p-4}{p^2+4p+3} X(p)(p^2+4p+3)$$

$$Y(p)(p^2+4p+3) = (2p-4)X(p)$$

$$p^2Y(p) + 4pY(p) + 3Y(p) = 2pX(p) - 4X(p) .$$

Тепер необхідно записати зворотне перетворення від обох частин рівняння, тобто замість функцій від p в нас будуть функції t , замість p у відповідному ступеню – відповідна похідна, тобто

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2x'(t) - 4x(t) ,$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} - 4x(t) .$$