

Les deux parties I et II peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre. Les vecteurs sont indiqués en caractères gras. Les vecteurs de base associés à un système d'axes x, y, z orthonormé direct sont notés $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$.

Données

Formule $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ où Δ est le laplacien vectoriel.

Equations de Maxwell macroscopiques dans un milieu matériel : $\mathbf{div}\mathbf{D} = \rho$;

$\mathbf{div}\mathbf{B} = 0$ $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$; $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ où ρ et $\mathbf{J}$ sont les densités volumiques de charge et de courant "libres".

Constantes universelles: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ou N.A^{-2} , $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$.

Présentation du problème

L'objectif de la compatibilité électromagnétique est de rendre compatible le fonctionnement d'un système sensible avec son environnement électromagnétique, les perturbations pouvant être générées soit par une autre partie du système, soit par l'environnement extérieur. Dans le cas de perturbations rayonnées (transportées par une onde électromagnétique), une solution couramment utilisée pour protéger les équipements sensibles consiste à les placer dans un boîtier métallique faisant écran entre l'équipement à protéger et la perturbation. L'ingénieur doit pouvoir dimensionner le boîtier et évaluer l'atténuation du champ électromagnétique due au boîtier.

Le pouvoir de protection d'un boîtier est caractérisé par l'efficacité de blindage en champ électrique et en champ magnétique.

Par définition, ces efficacités s'écrivent respectivement: $S_E = 20 \log_{10} \|\mathbf{E}_0/\mathbf{E}_{\text{int}}\|$ et $S_H = 20 \log_{10} \|\mathbf{H}_0/\mathbf{H}_{\text{int}}\|$, où $\mathbf{E}_{\text{int}}$ et $\mathbf{H}_{\text{int}}$ sont les champs à l'intérieur du boîtier et où $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$ sont ceux qui existeraient au même endroit en l'absence de boîtier. Ces efficacités de blindage s'expriment en décibels (dB). La détermination des efficacités de blindage est difficile. Une

forme analytique peut être obtenue après des calculs complexes dans le cas de l'enceinte sphérique. Pour d'autres géométries d'enceinte, il faut avoir recours à la simulation numérique en utilisant des logiciels complexes nécessitant des ordinateurs puissants. L'ingénieur a donc besoin de développer des modèles certes grossiers mais permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de l'atténuation du blindage avec une simple calculatrice. L'objectif de ce problème est de construire plusieurs modèles simples, d'analyser par ces approches simplifiées les propriétés du phénomène de blindage et de définir les limites d'application de ces modèles. La figure 1 présente les résultats obtenus par le calcul analytique au centre d'une enceinte sphérique de rayon interne 1 m, dont l'épaisseur de la coque vaut $d = 0,25 \text{ mm}$ et de conductivité $\sigma = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

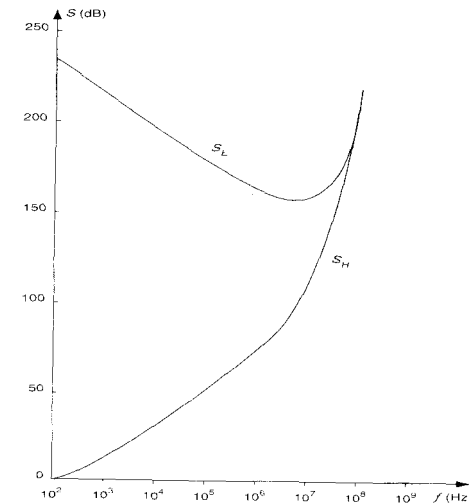


Figure 1

Question préliminaire : Au vu de la forme des efficacités de blindage d'une enceinte sphérique, dans quelle situation sera-il difficile de protéger un équipement?

Partie I Cas de la lame conductrice infinie

I.A Propagation d'une onde plane dans un milieu parfait (conducteur ou non)

I.A. 1a) On considère un milieu matériel continu "parfait", défini comme

ayant des propriétés diélectriques et magnétiques isotropes, linéaires et homogènes ; la permittivité électrique et la perméabilité magnétique absolues sont respectivement ϵ_0 et μ_0 , toutes deux réelles et indépendantes de la fréquence des champs. Ecrire les relations entre les champs E , D , H et B qui définissent les constantes ϵ_0 et μ_0 ; expliciter les équations de Maxwell dans ce milieu, supposé d'abord électriquement isolant, en n'y faisant plus apparaître que les champs E et B et la densité volumique de charges ρ .

b) Ce milieu peut être également conducteur de l'électricité ; on supposera alors que la conduction électrique obéit à la loi d'Ohm locale, avec une conductivité σ également homogène, isotrope et indépendante de la fréquence du courant. Ecrire à nouveau les équations de Maxwell dans ce cas.

I.A.2) On se limite dorénavant au cas où E et B sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω que l'on écrit sous forme de représentation complexe:

$E = \text{Rél}(E(r)e^{i\omega t})$ et $B = \text{Rél}(B(r)e^{i\omega t})$, r désignant l'ensemble des trois coordonnées d'espace. Ecrire les équations de Maxwell en notation complexe, portant sur $E(r)$ et $B(r)$, dans le cadre des hypothèses de la question précédente. Montrer qu'alors $\nabla \cdot B = 0$ nécessairement.

I.A.3) Montrer que dans le milieu matériel linéaire, homogène et isotrope étudié, l'amplitude complexe $E(r)$ du champ électrique en régime sinusoïdal vérifie l'équation: EINBETTEN Equation.3 (1).

et que $B(r)$ vérifie la même équation (1).

I.A.4) Vérifier qu'en donnant à ϵ_0 , μ_0 et σ des valeurs convenables, on retrouve bien à partir de (1), les équations décrivant la propagation des champs E et B dans le vide en régime sinusoïdal.

I.A.5) On étudie les solutions de (1) en géométrie plane (ou unidimensionnelle) les champs E et B ne dépendent que de la seule coordonnée x (et sont toujours des fonctions sinusoïdales du temps). On se limite de plus au cas où E est aligné selon y : alors $E(r) = E(x) = E(x)e_y$.

a) Montrer que dans ces conditions les solutions de (1) se mettent sous la forme :

$$E(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \quad (2)$$

où A_1 , A_2 et γ sont des constantes (complexes). Exprimer γ^2 en fonction de ϵ_0 , μ_0 , σ et ω .

b) À l'aide de l'une des équations de Maxwell, écrire une équation différentielle permettant d'évaluer à partir de $E(x)$ l'amplitude complexe

$B(x)$ du champ B associé. Exprimer $B(x)$ à l'aide des constantes A_1 , A_2 , ϵ_0 et ω en précisant sa direction.

I.A.6) Le cas du "bon conducteur". On considère un métal bon conducteur (Cu, Ag, Al...) pour lequel la conductivité électrique σ est de l'ordre de 3.10^7 à 7.10^7 S.m^{-1} , ϵ_0 est de l'ordre de ϵ_0 , ω est égale à ω_0 .

a) Montrer que pour les fréquences inférieures à $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$, le produit $\epsilon_0 \omega$ est négligeable devant σ . A quelle simplification cela correspond-il dans les équations de Maxwell? Que devient alors l'équation de propagation (1)?

b) Préciser, de manière concise, des situations physiques, en thermodynamique, en mécanique des fluides, en physico-chimie des milieux continus où l'on rencontre une équation analogue.

c) Pourquoi, dans le cas du métal, est-il inutile d'envisager des fréquences supérieures au THz ? Quelle(s) propriété(s) faudrait-il alors remettre en question? Pourquoi? On citera à ce propos une durée caractéristique dont on fournira un ordre de grandeur plausible.

d) Montrer que la simplification faite à la question I.A.6.a permet de mettre γ sous la forme $(1 + i)/\delta$, où δ est une constante réelle positive qui s'exprime en fonction de μ_0 , σ et ω . Contrôler l'homogénéité de l'expression de δ .

e) Reporter cette valeur de γ dans la solution (2) et interpréter physiquement chacun des deux termes ; expliquer pourquoi δ est appelée "épaisseur de peau".

f) Discuter les influences de la fréquence et de σ sur la valeur de δ .

g) Comparer, dans les "bons conducteurs", δ à la longueur d'onde λ_0 qu'auraient dans le vide les ondes planes sinusoïdales de pulsation ω . Conclure.

h) Application numérique: évaluer λ_0 et δ pour une fréquence de 10 MHz ,

$\sigma = 6,5.10^7 \text{ S m}^{-1}$, $\epsilon_0 = \epsilon_0$ et $\omega = \omega_0$. Commenter les résultats.

I.B. Couplage à travers une lame conductrice infinie

Dans tout ce qui suit, on supposera que ω est égale à ω_0 .

Le milieu conducteur (ϵ_0 , μ_0 , σ) étudié précédemment est limité par deux plans parallèles $x = 0$ et $x = d$. Il est illimité dans les directions y et z . On ne suppose pas nécessairement, dans un premier temps, qu'il s'agit d'un "bon conducteur". De part et d'autre de cette lame, l'espace est vide

de matière. Une onde électromagnétique plan progressive et sinusoïdale de pulsation ω arrive sur la lame en $x = 0$ sous incidence normale, depuis le demi espace $x < 0$. On suppose que cette onde est polarisée rectilignement, son champ électrique E_{inc} étant colinéaire à $y'y$. On note $E_{0,inc}$ l'amplitude complexe de ce champ en $x = 0$; on pose en outre $k_0 = \omega/c$. La présence des deux interfaces $x = 0$ et $x = d$ conduit à l'apparition d'une onde réfléchie vers le demi espace $x < 0$, que l'on admettra également plane, sinusoïdale de pulsation ω et polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente ; le champ électrique E_{ref} correspondant a pour amplitude complexe $E_{0,ref}$ en $x = 0$. Une onde transmise dans le demi espace vide $x > d$ a les mêmes caractéristiques que l'onde incidente ; le champ électrique E_{tr} correspondant a pour amplitude complexe $E_{0,tr}$ en $x = d$. A l'intérieur de la lame ($0 < x < d$), le champ E est également fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω et colinéaire à $y'y$; l'expression de son amplitude complexe en fonction de x est donnée par la formule (2) de la question I.A.5.a).

I.B.1a) Exprimer, en notation complexe, les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise.

b) Exprimer, toujours en notation complexe, les champs B puis les champs H associés

I.B.2) Comment s'expriment les conditions de passage pour le champ E aux interfaces $x = 0$ et $x = d$? Dans quelle mesure peut-on affirmer que le champ B est continu pour $x = 0$ et $x = d$? Même chose pour le champ H .

I.B.3) Dédire de ce qui précède et des résultats de I.A.5.b) quatre équations liant $E_{0,inc}$, $E_{0,ref}$, A_1 , A_2 , $E_{0,tr}$, ϵ , k_0 et d . L'élimination de $E_{0,ref}$, A_1 , A_2 dans ces équations conduit alors au résultat suivant, que l'on ne demande pas d'établir:

$$\frac{E_{0,inc}}{E_{0,tr}} = i \frac{(k_0 - i\gamma)^2 e^{\gamma d} - (k_0 + i\gamma)^2 e^{-\gamma d}}{4k_0 \gamma}.$$

I.C Analogie avec une ligne électrique

On peut retrouver ce résultat en

établissant une analogie avec la propagation d'ondes de tension et de courant dans une ligne électrique (câble coaxial par exemple). Pour ce faire, on adopte pour un tronçon élémentaire $[x, x + dx]$ de la ligne le modèle des "constantes réparties" schématisé de la façon suivante (figure 2); L , C , R et G

sont respectivement les inductance, capacité, résistance et conductance "de fuite" (ou perditance linéiques de la ligne.

I.C.1) Ecrire deux équations aux dérivées partielles entre $v(x,t)$ et $i(x,t)$ et leurs dérivées premières par rapport à x et au temps t .

I.C.2) On envisage un régime sinusoïdal forcé dans la ligne, de pulsation ω , et l'on pose $v(x,t) = \text{Rél}(V(x)e^{i\omega t})$ et $i(x,t) = \text{Rél}(I(x)e^{i\omega t})$. Ecrire les deux équations différentielles d'ordre 1 reliant $V(x)$ et $I(x)$, puis l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée séparément par $V(x)$ et $I(x)$.

I.C.3) En déduire que l'expression de $V(x)$, solution générale de ces équations, se met sous une forme analogue à l'expression (2) du champ électrique dans la lame, donnée à la question I.A.5.a). Donner l'expression de $I(x)$ en utilisant les constantes qui figurent dans celle de $V(x)$ et l'impédance

caractéristique (ou itérative) de la ligne $Z_C = (R + iL\omega)/\gamma$ avec γ partie imaginaire de $\gamma > 0$.

I.C.4) Exprimer Z_C en fonction de G , C , ω et γ .

I.X.5) Ον ρεπιεντ ρ λ'τυδε δε λα προπαγατιον δ'υνε ονδε [λεχτρομαγν[τιθυε πλανε, σινυσο|δαλε ετ πολαρισ[ε ρεχτιλιγνεμεντ δανσ le milieu conducteur linéaire (ϵ , μ_0 , σ). Μοντρερ θυε δευξ δεσ

[θυατιονσ δε Μαξωελλ, [χριτεσ απεχ λεσ σευλσ χηαμπσ E ετ H , conduisent à des relations analogues à celles de la question I.C.2. Si l'on choisit E comme analogue de $v(x,t)$ et H comme analogue de $i(x,t)$, quelles sont les constantes respectivement analogues à L , C , G et R ? En déduire deux expressions pour l'analogue électromagnétique Z_C de l'impédance caractéristique Z_C de la ligne. Quelle est la dimension de Z_C ?

I.C.6) Que peut-on dire d'une ligne électrique dans laquelle on aurait un phénomène de propagation analogue à celui des ondes électromagnétiques planes dans le vide ? Montrer que l'impédance caractéristique d'une telle ligne est en fait une résistance R_C . Que vaut alors pour le vide l'analogue électromagnétique Z_0 de l'impédance caractéristique R_C ? Exprimer Z_0 à l'aide de μ_0 et c seulement. Donner sa valeur numérique.

I.C.7) Le comportement de l'onde plane électromagnétique sinusoïdale à la traversée de la lame conductrice peut dès lors être retrouvé par analogie avec une ligne électrique comportant trois domaines $x < 0$, $0 < x < d$ et $x > d$, pour lesquels on définira les constantes électromagnétiques analogues à L , C , G et

I.C.8a) Montrer que les conditions de passage pour la tension et l'intensité du courant en $x = 0$ et $x = d$ se traduisent par des équations analogues à celles de la question I.B.3. On exprimera ces relations en termes d'amplitudes complexes de tensions (que l'on définira) et en faisant apparaître les impédances caractéristiques R_C et Z_C .

b) À partir du résultat fourni à la question I.B.3, donner alors, en s'aidant de l'analogie précisée ci-dessus, l'expression du rapport $\frac{E_{0,inc}}{E_{0,tr}}$ en fonction de z_0 , z_C et du produit yd .

c) Que vaut le rapport $\underline{H}_{0,\text{inc}} / \underline{H}_{0,\text{tr}}$?

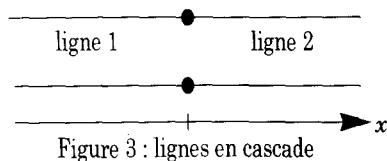
I.C.9) On pose $\gamma = \alpha + i\beta$, avec $\beta > 0$. Montrer que:

$$\left| \frac{\underline{E}_{0,\text{inc}}}{\underline{E}_{0,\text{tr}}} \right| = \left| \frac{(\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_C)^2}{4z_0 z_C} \mathbf{e}^{\alpha d} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{z}_C - \mathbf{z}_0}{\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_C} \right)^2 \mathbf{e}^{-2\alpha d} \mathbf{e}^{-2i\beta d} \right] \right| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Dans le but de déterminer et d'étudier les termes significatifs dans l'expression de l'efficacité de blindage, on se propose d'interpréter les trois termes a, b et c de l'expression précédente.

I.C.10) On considère deux lignes électriques idéales, c'est-à-dire sans pertes, de constantes linéiques respectives (L1, C1) et (L2, C2), montées "en cascade" (figure 3): Définir et évaluer, en fonction des impédances caractéristiques R_{C1} et R_{C2} de ces deux lignes, le coefficient de transmission T .

de la tension électrique au niveau de l'interface. En déduire une interprétation physique du terme (a).



I.C.11

.a) Comment peut-on interpréter le terme (b) ?

b) Quel phénomène physique n'a pas encore été pris en compte dans cette interprétation et peut être représenté par le terme (c) ?

I.C.12) On suppose que le matériau constituant la lame est un "bon conducteur" (question I.A.6).

a) Simplifier dans ce cas l'expression de l'analogie électromagnétique z_c de l'impédance caractéristique de ligne Z_C . Exprimer le rapport $zC/z0$ à l'aide de

l'épaisseur de peau δ $\epsilon\tau$ $\delta\epsilon$ $\lambda\alpha$ $\lambda\omicron\gamma\upsilon\epsilon\upsilon\rho$ δ' $\omicron\eta\delta\epsilon$ $\neq 0$ qu'auraient, dans le vide, les ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de pulsation ω ; $\chi\omicron\mu\pi\alpha\rho\epsilon\rho$ $\chi\epsilon$ ρ [$\sigma\upsilon\lambda\tau\alpha\tau$ $\diamond$ λ' $\upsilon\eta\eta\tau$].

**β) Εν δ'δυρε λεσ συμπλιφιχατιονσ θυι σ'ιμποσεντ δανσ
λ'εξπρεσσιον δυ rapport $|\underline{E}_{0,inc} / \underline{E}_{0,tr}|$ donné à la question I.C.9.**

I.C.13.a) Etudier alors comment les termes (a) et (b) varient avec la fréquence.

b) En supposant d » **δ**, **ΘΥΕ** PEUT-on dire du terme (c) ? Interpréter.

I.C.14a) Représenter sur un même graphique (abscisse: fréquence en échelle logarithmique et ordonnée: efficacité de blindage en dB) l'allure des courbes correspondant aux termes (a) et (b) . En déduire l'allure plausible de celle qui représente l'efficacité de blindage SE en champ électrique ; qu'en est-il de l'efficacité de blindage S_H en champ magnétique?

b) Discuter selon la fréquence les phénomènes prépondérants pour l'évaluation des efficacités de blindage.

I.D Limitations du modèle de la lame infinie pour l'analyse de l'efficacité du blindage d'une enceinte

I.D.1) Comparer les résultats obtenus dans le cas de la lame infinie et de l'enceint sphérique.

I.D.2a)

Dans quel domaine de fréquences le modèle de la lame infinie est-il suffisant pour expliquer les résultats obtenus dans le cas de l'enceinte sphérique? Expliquer la concordance des résultats en considérant le rapport entre la longueur d'onde dans le vide du rayonnement électromagnétique et les dimensions caractéristiques de l'enceinte.

b) Dans quel domaine de fréquences le modèle de la lame infinie est-il au contraire insuffisant pour expliquer les résultats obtenus dans le cas de l'enceinte sphérique.

Expliquer la discordance des résultats ; quels phénomènes physiques ne sont pas pris en compte dans le modèle de la lame infinie par rapport au cas de l'enceinte blindée?

Partie II Efficacité de blindage en régime quasipermanent

II.A. Préliminaires. On suppose dans cette partie que l'enceinte est plongée dans un champ électrique E_0 et un champ magnétique B_0 tous deux uniformes et fonctions sinusoïdales du temps avec la pulsation ω . Ces champs résultent d'une onde plane incidente (E_{inc}, B_{inc}) sur la structure.

1) À quelle condition, portant sur la longueur d'onde dans le vide de l'onde incidente et les dimensions caractéristiques de l'enceinte, ces hypothèses simplificatrices sont-elles acceptables?

2) Pourquoi doit-on a priori distinguer E_0 et E_{inc} ainsi que B_0 et B_{inc} ? Dans quelle mesure peut-on cependant supposer que $\|E_0\|$ et $\|E_{inc}\|$ d'une part, et que $\|B_0\|$ et $\|B_{inc}\|$ d'autre part, sont du même ordre de grandeur? Justifier que, dans ces conditions, l'on puisse les confondre dans le calcul des efficacités de blindage SE et SH. Quel est l'ordre de grandeur du rapport $\|E_0/B_0\|$?

3) Expliquer brièvement en quoi consiste l'approximation des régimes quasipermanents (ou quasistationnaires).

4) Ecrire, sous forme intégrale, le théorème d'Ampère et la loi de Faraday dans un milieu matériel.

II.B. Action du champ magnétique extérieur

L'enceinte a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les faces sont constituées par lames métalliques d'épaisseur d et de conductivité électrique σ . Λ'ιντ[ριευρ εστ πιδε. Χοντραιρεμεντ αυ χας δε λα λαμε ινφινιε

(παρτιε I), le champ magnétique B_0 est responsable à l'intérieur des parois de la circulation d'un courant de densité J dont les **lignes sont fermées. À l'intérieur de l'enceinte, les champs sont notés E_{int} et B_{int} . Dans un but simplification, on suppose que B_{int} est uniforme et de même direction que B_0 . La continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface métal/vide fait les lignes de E_{int} sont également des courbes fermées épousant la forme des parois** (figure 4). L'efficacité de blindage en champ électrique est évaluée à proximité des parois.

L'étude de "l'effet de peau" dans un conducteur ohmique en régime quasipermanent permet de proposer une expression approchée du

vecteur lame métallique de direction parallèle à B_0 ; dans celle qui est représentée sur la figure (5) on pose : $J = \text{Rél}(J(x) e^{iB\omega t}) e_y$.

Cas a : pour les "basses" fréquences, d est notablement inférieure à l'épaisseur de peau δ **δ<φινιε ϙ λα θυεστιον I.A.6; θ πευτ αλορσ |τρε** supposée uniforme dans la lame : $J(x) = J_0$.

Cas b : pour les "hautes" fréquences (mais toujours en régime quasipermanent), d est très supérieure à δ **ετ θ(ξ) δ|χρο|τ εξπονεντιελλεμεντ: θ(ξ) = θ0** $\exp(-(1+i)x/\delta)$ pour $0 < x < d$.

II.B.1) On pose: $B_0 = \text{Rél}(B_0 e^{i\omega t})_z$ à l'extérieur de l'enceinte et $B_{int} = \text{Rél}(B_{int} e^{i\omega t})_z$ à l'intérieur.

a) Exprimer, dans chacun des deux cas a et b, B_{int} en fonction de B_0 , J_0 , d et δ .

b) En utilisant la loi d'Ohm, évaluer l'amplitude complexe E_{int} du champ électrique E_{int} au voisinage de la paroi en fonction de J_0 , d et δ et de la conductivité σ du métal de la lame dans chacun des cas a et b.

II.B.2) Trouver une relation simple reliant E_{int} , B_{int} , ω et λ et σ caractéristiques géométriques S_z et L_z de l'enceinte.

II.B.3) Exprimer E_{int} , B_{int} et J_0 en fonction de B_0 , d et δ et σ et des caractéristiques géométriques de l'enceinte dans chacun des cas a et b.

II.C Bilan

Dans le cas du régime quasipermanent, on admettra que les effets du champ électrique extérieur E_0 sont négligeables devant ceux qui sont produits par B_0 .

II.C.1) Représenter sur un même graphique (abscisse : fréquence en échelle logarithmique ordonnée : efficacité du blindage en dB)