

INSTITUCION EDUCATIVA TECNICA LA SAGRADA FAMILIA

Docente: John Freddy Ramírez Grado: 9º Área (asignatura): Matemáticas
Taller 2.1 [Primer periodo] – año 2023: Función Lineal

Nombre _____ Curso _____

NIVEL DE LOGRO DEL PRIMER PERIODO

- Modelo situaciones de variación haciendo uso de funciones polinómicas.

Desempeños	Descripción de los desempeños
Nivel comunicativo	- Construye argumentaciones orales y escritas. - Manipula proposiciones en las que usa números [naturales, enteros, fraccionarios, decimales].
Nivel de Razonamiento	- Justifica procedimientos y estrategias. - Estructura argumentos.
Nivel Solución de Problemas	- Aplica diferentes estrategias para la solución de un problema. - Justifica la elección de métodos o de instrumentos para la solución de un problema. - Razona las respuestas obtenidas.

1. Concepto de función lineal

$$y = m x + b$$

La letra **y** representa un valor que es VARIABLE. Debe notarse que $y = 1 \cdot y$ y que se encuentra elevada al exponente 1. Así: $y^1 = y$, o sea que una vez multiplicada la **y** nos da **y**.

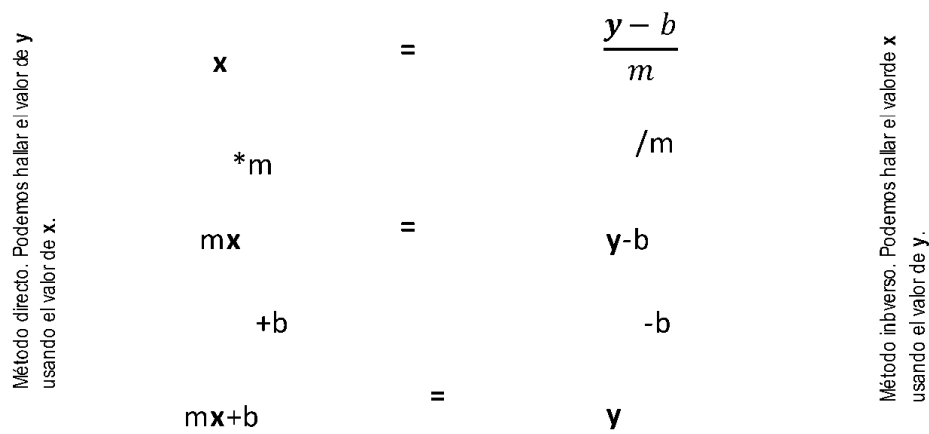
La letra **m** representa un valor que es CONSTANTE. Debe notarse que **m** resulta de dividir lo que aumenta en **y** (Δy) sobre lo que aumenta en **x** (Δx). Su valor puede ser positivo, negativo o cero.

La letra **b** representa otro valor que es CONSTANTE. Este número nos da el valor del corte de la gráfica de la función lineal con el eje donde se representan los valores de la variable **y**. Este valor se obtiene cuando el valor de **x** es cero ($x = 0$).

La letra **x** representa otro valor que es VARIABLE. Debe notarse que $x = 1 \cdot x$ y que se encuentra elevada al exponente 1. Así: $x^1 = x$, o sea que una vez multiplicada la **x** nos da **x**.

La *función lineal* es una función polinómica de primer grado [lo que significa que las variables se encuentran elevadas al exponente 1]. Para la relación entre dos variables **x** e **y** suele escribirse como: $y = mx + b$, llamada generalmente la forma estandar, como se muestra en la anterior figura.

En el siguiente diagrama, recordando la forma de representar las relaciones entre variables que hemos trabajado en sexto y séptimo grado, podemos representarla como sigue. Al lado izquierdo se representan los pasos que sirven para hallar el valor de **y** cuando nos dan **x** (método directo); al lado derecho encontramos los pasos a realizar para hallar **x**, cuando nos dan **y** (método inverso).



Esta función servirá como modelo de aquellos fenómenos en los que es posible encontrar que las variables relacionadas estén elevadas al exponente 1 y que tienen una pendiente que siempre es constante; o sea, que siempre aumenta lo mismo en **x** en relación con lo que aumenta en **y**.

2. ¿Hemos trabajado algunas funciones lineales en el pasado?

En la siguiente tabla podemos hacer una relación de diferentes problemas que hemos trabajado en el pasado y podemos analizarlas para saber si eran o no funciones lineales.

Fenómeno que se ha modelado	Fórmula	Organizada para comparar con $y=mx+b$	Variables	Pendiente y punto de corte	¿Es función lineal? ¿Por qué?
Una sucesión que arranca con 3 cuadritos (C) y aumenta 4 cuadritos cada que aumenta un paso (P).	$C = (P-1)*4+1$	$C = (P-1)*4+1$ Multiplicamos P-1 con 4: $C = 4P-4+1$ Simplificamos sumando constantes, y queda: $C = 4P-3$	C y P, cada una está elevada al exponente 1.	Comparando vemos que la pendiente $m=4$ y el punto de corte $b=-3$.	Sí, tiene igual forma que la expresión estándar $y=mx+b$.
Líneas (L) que conectan puntos (P) que se encuentran en el borde una circunferencia.	$L = \frac{P(P-1)}{2}$	$L = \frac{P(P-1)}{2}$ Multiplicamos arriba, dando: $L = \frac{P^2-P}{2}$	L y P, pero vemos que P se encuentra elevada al	Comparando vemos que no ajusta con la forma estándar.	No, ya que no tiene igual forma que la expresión estándar $y=mx+b$.

Fenómeno que se ha modelado	Fórmula	Organizada para comparar con $y=mx+b$	Variables	Pendiente y punto de corte	¿Es función lineal? ¿Por qué?
			exponente 2 y al 1.		
Longitud (L) de una circunferencia de radio R.	$L = 2\pi R$, donde el $\pi=3,15$ es un número constante	$L = 2\pi R$ Podemos sumar 0 para que se parezca más a la forma estándar. $L = 2\pi R + 0$	L y R, cada una está elevada al exponente 1.	Comparando vemos que la pendiente $m=2\pi$ y el punto de corte $b=0$.	Sí, tiene igual forma que la expresión estándar $y=mx+b$.
Construcción de medida en el plano (P) de acuerdo con valores reales (R) y una escala (1:50).	$P = \frac{1}{50} * R$	$P = \frac{1}{50} * R$ Podemos sumar 0 para que se parezca más a la forma estándar. $P = \frac{1}{50} * R + 0$	P y R, cada una está elevada al exponente 1.	Comparando vemos que la pendiente $m=\frac{1}{50}$ y el punto de corte $b=0$.	Sí, tiene igual forma que la expresión estándar $y=mx+b$.

Con base en la información obtenida, podemos darnos cuenta que hemos modelado varios fenómenos en los que hemos usado funciones lineales, y en todos estos casos la forma puede organizarse de tal manera que se puede ver su similitud con la forma estándar. Pero también podemos ver que existen una de estos fenómenos que no modelamos usando funciones lineales.

3. Ejemplos en los que se hallan pendiente e intersección, en tabla, en gráfica en plano cartesiano y algebraicamente.

Uno de los aspectos interesantes es que podemos resolver las funciones de muchas maneras. Aquí nos concentramos en la función lineal como modelo matemático, pero no nos interesa ahora saber cuál es el fenómeno que estamos modelando. En el desarrollo mostraremos, al menos, tres formas diferentes de hallar la pendiente y obtener el punto de intersección. En todas las formas de solución usaremos la misma función lineal, lo que quiere decir que los patrones que relacionan las variables son los mismos. Tomemos para trabajar: $y = -5(x-1) + 3$

3.1. Solución usando tablas

Podemos construir una tabla de datos vertical u horizontal en la que podemos obtener los valores de cada una de las variables. Asumiremos que las variables pueden tomar valores racionales.

x	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	+0.5	+1.0	+1.5	+2.0	+2.5
$y=-5(x-1)+3$	25.5	23	20.5	18	15.5	13	10.5	8	5.5	3	0.5	-2	-4.5

Podemos tomar dos valores cualesquiera de x y sus correspondientes valores de y para hallar el valor de la pendiente. A continuación se han sombreado en color naranja los dos valores de x escogidos.

$$\Delta x = +1.5$$

x	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5
y=-5x+8	25.5	23	20.5	18	15.5	13	10.5

$$\Delta y = -7.5$$

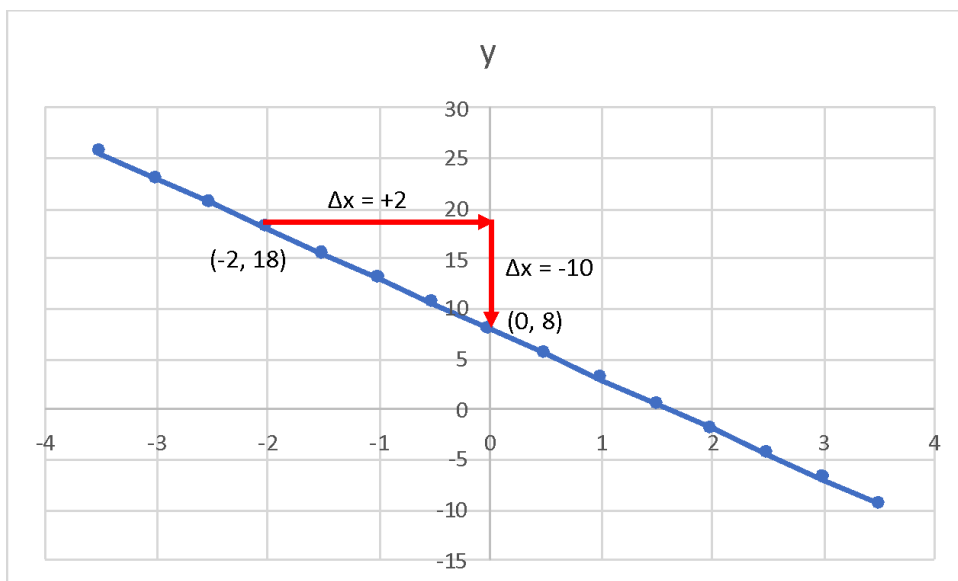
Nótese que para x y para y tomamos las flechas en el mismo sentido y observamos cuánto aumenta entre un valor y otro. El aumento en x se escribe como Δx , y según la tabla es $\Delta x = +1.5$. El aumento en y se escribe como Δy , y según la tabla es $\Delta y = -7.5$. Para hallar el valor de la pendiente (m) lo que hacemos es hallar el valor que resulta de dividir el aumento en y con el aumento en x. Así:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7.5}{+1.5} = -5$$

Para hallar el valor de la intersección con el eje y, vamos a la tabla (en color verde lo he señalado) y buscamos donde $x=0$, y así obtenemos que $y=8$.

3.2. Solución usando gráfica en plano cartesiano

Podemos proceder a graficar con calculadora y lápiz los puntos que aparecen en la tabla, o se pueden realizar en Excel o en una calculadora en la internet. Podemos obtener una gráfica como la que sigue:



He tomado dos puntos: $(-2, 18)$ y $(0, 8)$. Recuerda que el primer valor corresponde a la variable **x** y el segundo a la variable **y**. De acuerdo con la gráfica, podemos darnos cuenta que en **x** aumenta 2

mientras en **y** disminuye 10.

De acuerdo con estos valores, podemos hallar el valor de la pendiente dividiendo los aumentos que se dieron:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10}{+2} = -5$$

Para saber en cuál valor se corta la gráfica con el eje vertical, donde se ponen los valores de la variable y; entonces vamos en la horizontal al valor de $x=0$ y buscamos hacia arriba el valor de y, encontrando que $y=8$.

3.3. Solución algebraica

Aquí operamos usando la forma estándar y comparando. Como tenemos una expresión que no se parece a la forma estándar, la debemos organizar. Veamos: $y = -5(x-1) + 3$

Esto quiere decir que $(x-1)$ se resta 5 veces, quedando de la siguiente manera:

$$y = -(x-1) -(x-1) -(x-1) -(x-1) -(x-1) + 3$$

Rompemos paréntesis, pero como cada uno de estos está antecedido de -, entonces los términos de adentro salen con signo contrario, quedando así:

$$y = -x+1-x+1-x+1-x+1-x+1+3$$

Simplificamos sumando y obtenemos:

$$y = -5x+8$$

Una segunda forma, más resumida, cuando uno sabe que lo anterior se cumple, consiste en aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

multiplica

$$y = -5(x-1) + 3 = -5x + 5 + 3 = -5x + 8$$

multiplica

En este caso, resumido insisto, -5 multiplica cada uno de los términos que se encuentran al interior del paréntesis. Así: $-5 \cdot x = -5x$; y $(-5) \cdot (-1) = +5$, ya que negativo por negativo nos da un resultado positivo. Con el resultado obtenido, $+5+3=+8$.

Si comparamos esta expresión con la forma estándar, encontramos que:

$$y = -5x+8 \quad \square \quad y = mx+b$$

Comparando podemos saber que $m=-5$ y $b=+8$.

3.4. Despeje de la otra variable usando método de balanza o diagrama

En la función que nos dieron ya se encuentra despejada la variable **y**; ahora mediante dos métodos diferentes vamos a despejar la variable **x**.

Proceso algebraico	Explicación
$y = -5x + 8$	Fórmula inicial. Observemos que la x se encuentra a la derecha multiplicando por -5 y luego suma 8. Vamos a dejar el término -5x quieto a la derecha y buscaremos quitar el +8.
$y - 8 = -5x + 8 - 8$	A la derecha agregamos -8 para que al sumar con +8 de igual a cero. Pero como lo hicimos a la derecha, tenemos que hacer lo mismo a la izquierda para que no se nos dañe la igualdad (o la balanza se desequilibre).
$\frac{y-8}{-5} = \frac{-5x}{-5}$	A la derecha nos queda -5 multiplicando a x . Como queremos que nos quede una x (1 x), entonces usamos la operación contraria, dividimos entre -5 a ambos lados; a la derecha para que nos dé 1 multiplicado con x , y a la izquierda para que no se desequilibre la balanza.
$\frac{y-8}{-5} = 1x = x$	Dividimos y obtenemos el valor de 1 x .

Otra forma de hacer este proceso es precisamente hallando el método inverso a través del diagrama, como se hizo arriba. Veamos:

Método directo. Podemos hallar el valor de y usando el valor de x .	$x = \frac{y-8}{-5}$ $x \cdot (-5) = \frac{y-8}{-5} \cdot (-5)$ $-5x = y-8$ $-5x + 8 = y-8 + 8$ $-5x + 8 = y$	$\frac{y-8}{-5}$ $/-5$ $y-8$ -8 y	Método inverso. Podemos hallar el valor de x usando el valor de y .
---	---	---------------------------------------	---

A partir de esta expresión que permite calcular el valor de 1**x**, podemos hallar el punto de corte con el eje horizontal (donde se ubican los valores de la variable **x**) tomando **y=0** [no se encuentra por encima ni por debajo del eje horizontal]. Así:

$$x = \frac{y-8}{-5} = \frac{0-8}{-5} = \frac{-8}{-5} = +1.6$$

De esta forma obtenemos que este punto de corte con la horizontal es: (1.6, 0). Mientras que el punto de corte con la vertical es: (0, 8).

Ejercicios

Con base en las explicaciones escritas aquí, y si se quiere complementar con las clases grabadas, resolver los siguientes ejercicios de función lineal. A cada ejercicio se le debe realizar:

- Tabla de datos.
- Gráfica en plano cartesiano.
- Despejar las dos variables que participan en la función, usando el método de balanza o de diagrama, explicando los resultados.
- Hallar el valor de la pendiente de la función usando cualquier método y explicándolo.
- Hallar los puntos de corte de la gráfica de la función con los dos ejes.

Los ejercicios, de acuerdo con cada grupo, son los siguientes:

Grupo 902	Grupo 903
$2\mathbf{A} = 8\mathbf{H} + 6$	$\mathbf{y} = 8\mathbf{x} - 10$
$\mathbf{L} = -7\mathbf{T} + 4$	$\mathbf{F} = 12\mathbf{Q} - 8$
$\mathbf{K} = 4\mathbf{J} + 8$	$\mathbf{t} = (1.5)\mathbf{s} + 2$
$\mathbf{G} = (1.5)\mathbf{F} + 7$	$\mathbf{L} = 4\mathbf{D} + 2$
$\mathbf{N} = 3\mathbf{S}$	$15\mathbf{X} = 9\mathbf{J} - 0$