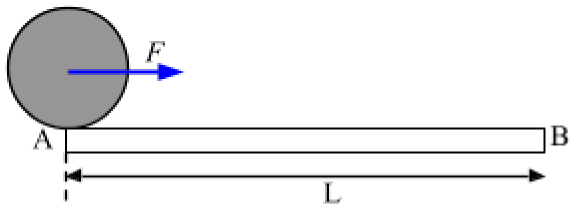
Ο κύλινδρος και μια ελεύθερη σανίδα

Ένας κύλινδρος μάζας $M = 6kg$ και ακτίνας $R = 10cm$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντια σανίδα ΑΒ μάζας $m = 3kg$. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον κύλινδρο και τη σανίδα είναι $\mu_s = 0,1$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, που το κέντρο μάζας του κυλίνδρου βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνάει από το άκρο Α της σανίδας, ασκούμε στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F = 5N$. Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω στη σανίδα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = ½ MR^2$ και $g = 10m/s^2$.



α) Σχεδιάστε τη στατική τριβή στο δίσκο και στη σανίδα εξηγώντας τη φορά τους. Τι κίνηση θα κάνει η σανίδα;

β) Βρείτε το μέτρο της στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο.

γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης F, ώστε ο κύλινδρος να μην ολισθαίνει πάνω στη σανίδα;

δ) Υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσης της σανίδας, της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

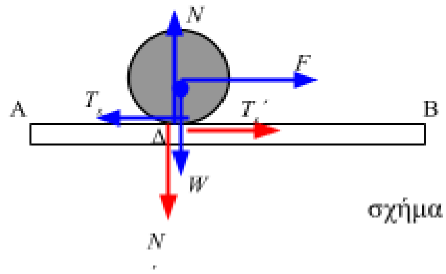
ε) Πότε θα φτάσει ο κύλινδρος στο άκρο Β της σανίδας και πόσες στροφές θα εκτελέσει;

στ) Ποιες ενεργειακές μετατροπές συμβαίνουν;

Το δάπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται η σανίδα θεωρείται λείο.

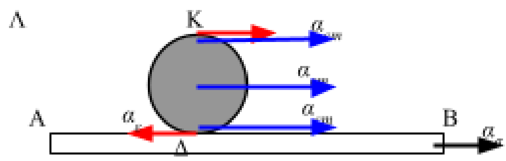
Απαντήσεις

α) Ο κύλινδρος κυλίεται πάνω στη σανίδα ωρολογιακά επιταχυνόμενος και γωνιακά. Η μόνη δύναμη που έχει στροφικό ρόλο είναι η στατική τριβή άρα η φορά της θα είναι προς τα αριστερά όπως στο σχήμα 1. Ο 3[ος] Νόμος Newton μας λέει ότι και η σανίδα θα δεχτεί από τον κύλινδρο την αντίδραση T_s' με κατεύθυνση δεξιά, όπως δείχνει το σχήμα 1. Άρα το κέντρο μάζας της σανίδας επιταχύνεται προς τα δεξιά.



σχήμα 1

β) Το σημείο επαφής Δ του κυλίνδρου με τη σανίδα, αφού ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, πρέπει να έχει κάθε χρονική στιγμή την επιτάχυνση της σανίδας. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2



σχήμα 2

$$\alpha_\Delta = \alpha_\sigma \Leftrightarrow \alpha_{cm} - a_\varepsilon = \alpha_\sigma$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} R = \alpha_{cm} - \alpha_\sigma \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το 2º Νόμο Newton για την μεταφορική και στροφική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Leftrightarrow F - T_s = M\alpha_{cm} \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{F - T_s}{M} \quad (2)$$
$$\Sigma \vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow T_s R = ½MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$$
$$\Leftrightarrow T_s = ½\, M R\alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} R = \frac{2T_s}{M} \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε το 2º Νόμο Newton για τη σανίδα:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{\alpha}_\sigma \Leftrightarrow T_s = m a_\sigma \Leftrightarrow T_s = \quad {}_\sigma \Leftrightarrow \alpha_\sigma = \frac{T_s}{m} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(2),(3),(4)} \frac{2T_s}{M} = \frac{F - T_s}{M} - \frac{T_s}{m} \Leftrightarrow 2T_s m = (F - T_s)m - T_s M$$
$$\Leftrightarrow 2mT_s + mT_s + MT_s = mF \Leftrightarrow (M + 3m)T_s = mF \Leftrightarrow T_s = \frac{mF}{M + 3m} \quad (5)$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $T_s = \dfrac{3 \cdot 5}{6 + 9} \Leftrightarrow T_s = 1N$

γ) Η οριακή τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον κύλινδρο έχει μέτρο

$$T_{o\rho} = \mu_s N \Leftrightarrow T_{o\rho} = \mu_s M g \quad (6)$$

Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος πρέπει

$$T_s \le T_{o\rho} \xrightarrow{(5),(6)} \frac{mF}{M + 3m} \le \mu_s Mg \Leftrightarrow F \le \frac{\mu_s Mg\left(M + 3m\right)}{m} \Leftrightarrow F \le \frac{0,1 \cdot 60 \cdot 15}{3} \Leftrightarrow F \le 30N$$

δ) Για τις επιταχύνσεις έχουμε:

$$(2) \to \alpha_{cm} = \frac{F - T_s}{M} \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{5 - 1}{6} \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} m/s^2$$

$$(4) \to \alpha_\sigma = \frac{T_s}{m} \Leftrightarrow \alpha_\sigma = \frac{1}{3} m/s^2$$

$$(3) \to \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T_s}{MR} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 0,1} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{10}{3} rad/s^2$$

δ) Η μετατόπιση του κυλίνδρου θα είναι

$$x_\kappa = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Leftrightarrow x_\kappa = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^2 \Leftrightarrow x_\kappa = \frac{1}{3}t^2 \quad (7)$$

Η μετατόπιση της σανίδας θα είναι

$$x_\sigma = \frac{1}{2}\alpha_\sigma t^2 \Leftrightarrow x_\sigma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t^2 \Leftrightarrow x_\sigma = \frac{1}{6}t^2 \quad (8)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα, για να φτάσει ο κύλινδρος στο άκρο Β της σανίδας πρέπει

$$x_\kappa - x_\sigma = L \xrightarrow{(7),(8)} \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^2 = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t^2 = 1,5 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = 3s$$

Η γωνία στροφής του κυλίνδρου θα είναι

$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot 3^2 = 15rad$, οπότε θα εκτελέσει $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{15}{2\pi}$ *στροφές*.

ε) Η μετατόπιση του κυλίνδρου είναι $x_\kappa = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3m$

Το έργο της δύναμης *F* είναι $w_F = F\cdot x_\kappa = 5\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^2 = 15J$

Η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου είναι

$$K_{\kappa(\mu)} = w_{\Sigma F_x} = \left(F - T_s\right)\cdot x_\kappa = 4\cdot 3 = 12J$$

Η κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης του κυλίνδρου είναι

$$K_{\kappa(\sigma)} = w_{\Sigma\tau} = T_s\cdot R\cdot\Delta\theta = 1\cdot 0,1\cdot 15 = 1,5J$$

Η μετατόπιση της σανίδας είναι $x_\sigma = \frac{1}{6}\cdot 3^2 = 1,5m$

Η κινητική ενέργεια της σανίδας είναι $K_\sigma = w_{\Sigma F_x} = T_s\, x_\sigma = 1\cdot 1,5 = 1,5J$

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η Αρχή Διατήρησης Ενέργειας, αφού η δύναμη *F*, προσφέρει μέσω έργου ενέργεια ***15J***, από τα οποία

- ***13,5J*** εμφανίζονται ως κινητική ενέργεια του κυλίνδρου και
- ***1,5J*** ως κινητική ενέργεια στη σανίδα.

Σχόλιο

Η στατική τριβή έχει σημαντικό ενεργειακό ρόλο αφού μεταφέρει ***1,5J*** ενέργεια για τη στροφική κίνηση στον κύλινδρο (αφαιρώντας τα από τη μεταφορική του κίνηση) και ***1,5J*** ενέργεια για τη μεταφορική κίνηση της σανίδας.

Ανδρέας Ριζόπουλος