1.- Una empresa de material informático dispone de dos cadenas de fabricación, A y B, en las que quiere aumentar su producción realizando horas extraordinarias.
En una hora extraordinaria de trabajo, la cadena A prepara 15 portátiles y 6 tablets y la cadena B prepara 10 portátiles y 10 tablets. Los costes de producción por hora extraordinaria de A y B son de 300 € y 600 €, respectivamente por hora extraordinaria. La cadena B puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena A. Si para la próxima semana se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets, formule y resuelva el problema que permita obtener la planificación de la empresa que minimice los costes de producción.
¿A cuánto ascienden dichos costes?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de horas extraordinarias	nº de portátiles	nº de tablets	coste (en €)
cadena A	x	15x	6x	300x
cadena B	y	10y	10y	600y
total	x + y	15x + 10y	6x + 10y	300x + 600y

Las restricciones son $\{y \leq 3x \; 15x + 10y \leq 360 \rightarrow 3x + 2y \leq 72 \; 6x + 10y \geq 216 \rightarrow 3x + 5y \geq 108 \; x \geq 0, y \geq 0$
.

La función a optimizar (minimizar) es el coste: $f(x, y) = 300x + 600y$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$y \leq 3x \rightarrow$ Recta: $y = 3x$

x	0	1
y	0	3

$x = 0, \quad y = 3.0, \; y = 0$
$x = 1, \quad y = 3.1, \quad y = 3$

$(1, 0) \rightarrow 0 \leq 3.1$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene
al (1, 0).

$3x + 2y \leq 72 \rightarrow$ Recta: $3x + 2y = 72$

x	0	24
y	36	0

$x = 0, \quad 3.0 + 2y = 72, \quad y = 36$
$y = 0, \quad 3x + 2.0 = 72, \quad x = 24$

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 2.0 \leq 72$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$3x + 5y \geq 108 \rightarrow$ Recta: $3x + 5y = 108$

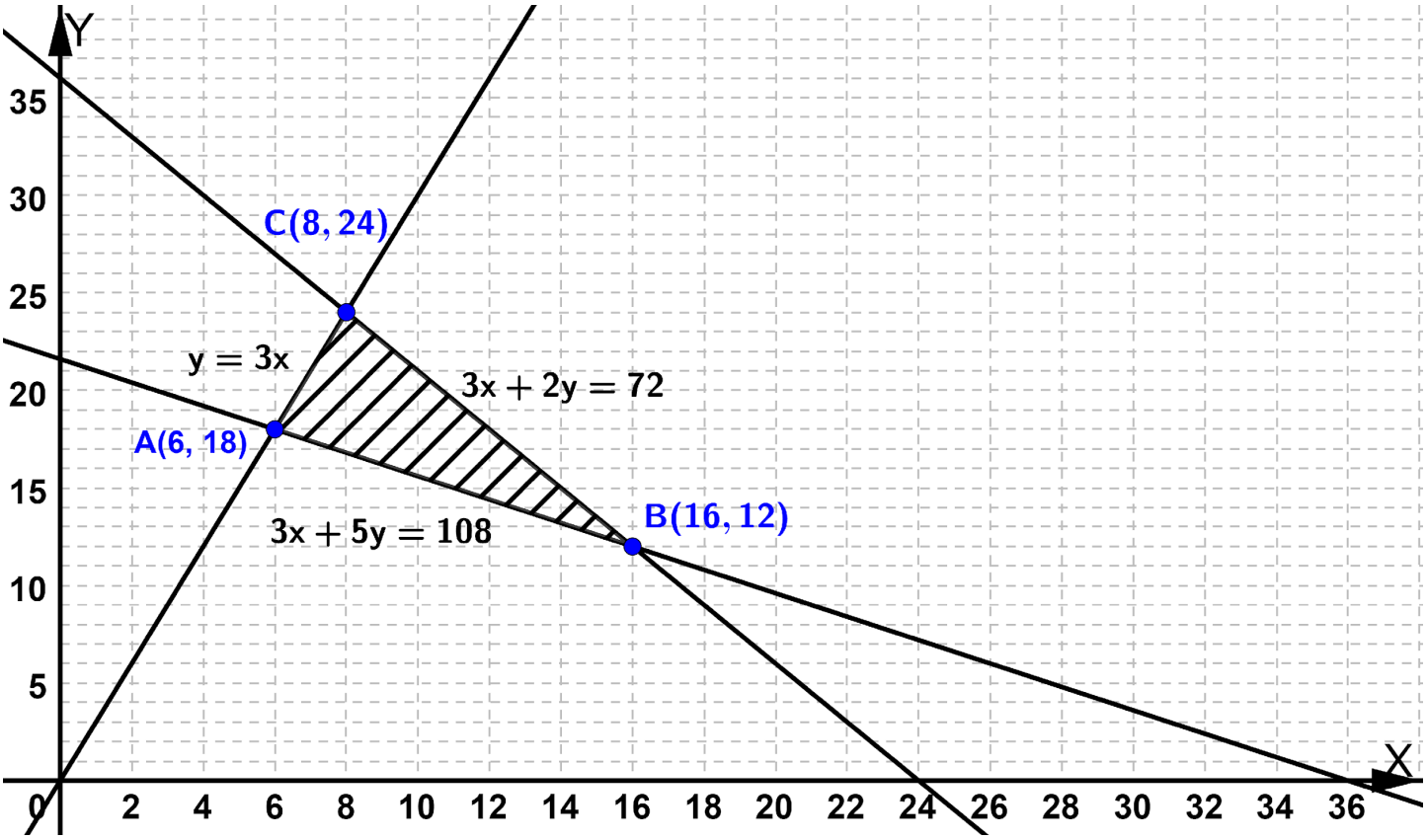
x	1	36
y	21	0

$x = 1, \quad 3.1 + 5y = 108, \quad y = 21150$
$y = 0, \quad 3x + 5.0 = 108, \quad x = 36$

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 5.0 \geq 108$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) ; $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) ; $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{y = 3x\ 3x + 5y = 108\ ; 3x + 5.3x = 108,\ 18x = 108,\ x = 6\ ;\ y = 3.6\ ,\ \ y = 18 \rightarrow A(6,\ 18)$

$\{3x + 5y = 108\ 3x + 2y = 72$; restando, $3y = 36,\ \ y = 12\ \ ;\ 3x + 2.12 = 72,\ \ x = 16 \rightarrow B(16,\ 12)$

$\{y = 3x\ 3x + 2y = 72\ ; 3x + 2.3x = 72,\ 9x = 72,\ x = 8\ ;\ y = 3.8\ ,\ \ y = 24 \rightarrow C(8,\ 24)$

Veamos en qué vértice alcanza el valor mínimo $f(x, y) = 300x + 600y$:

$f(A) = f(6, 18) = 300.6 + 600.18 = 12600$ $\qquad$ $f(B) = f(16, 12) = 300.16 + 600.12 = 12000$

$f(C) = f(8, 24) = 300.8 + 600.24 = 16800$

El coste mínimo es 12000 € y se alcanza con 16 horas extraordinarias en la cadena A y 12 en la B.

2.- Una compañía de transporte marítimo de mercancías dispone de dos barcos B_1 y B_2 para realizar una determinada ruta, durante un año, entre dos ciudades costeras europeas. El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2. Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24. La compañía obtiene unos beneficios de 15000 € por cada viaje del barco B_1 y 17000 € por cada viaje del barco B_2.
Halle el número de viajes que debe realizar cada barco para que el beneficio obtenido por la empresa sea máximo y obtenga dicho beneficio.

Resolución

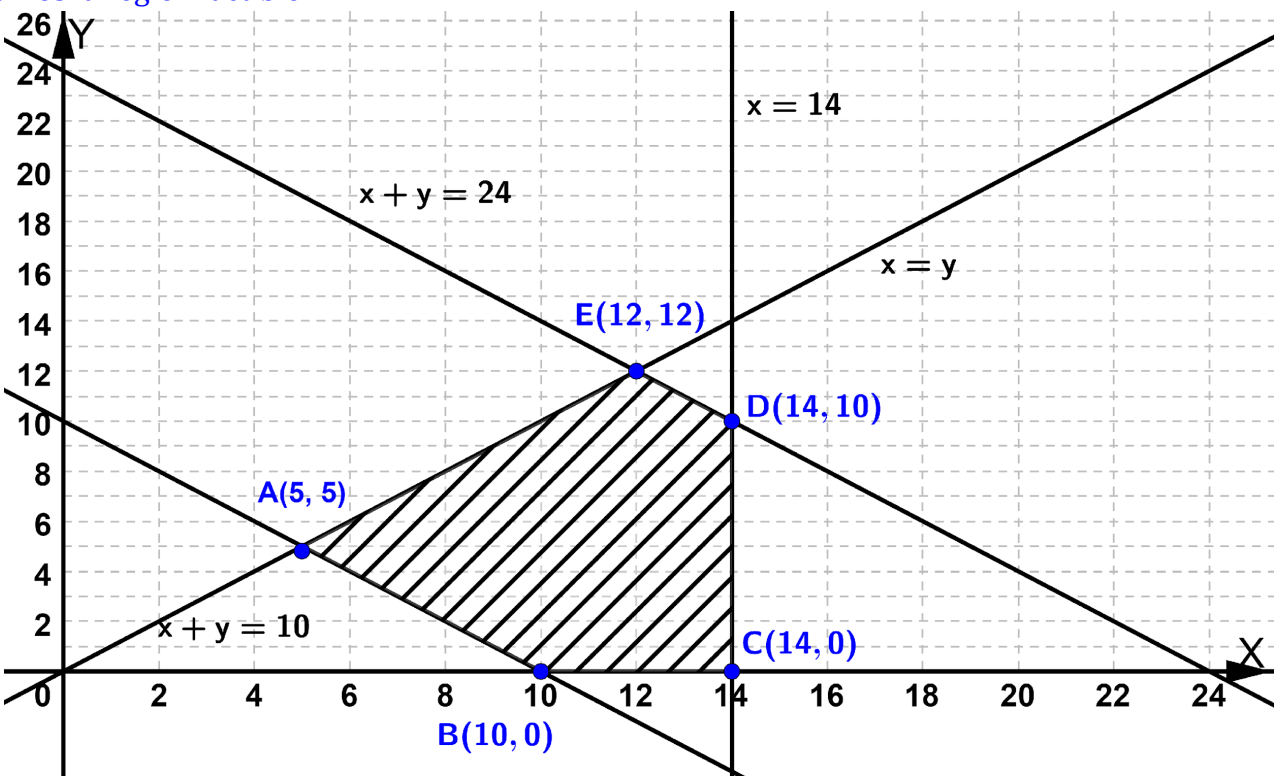
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de viajes	beneficio (en €)
barco B_1	x	15000x
barco B_2	y	17000y
total	x + y	15000x + 17000y

Las restricciones son
$\{x \leq 14 \; x \geq y \; 10 \leq x + y \leq 24 \; x \geq 0, y \geq 0$.

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: f(x, y) = 15000x + 17000y

Dibujamos la región factible



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo f(x, y) = 15000x + 17000y:

f(A) = f(5, 5) = 15000.5 + 17000.5 = 160000 f(B) = f(10, 0) = 15000.10 + 17000.0 = 150000

f(C) = f(14, 0) = 15000.14 + 17000.0 = 210000 f(D) = f(14, 10) = 15000.14 + 17000.10 = 380000

f(E) = f(12, 12) = 15000.12 + 17000.12 = 384000

El beneficio máximo es 384000 € y se alcanza con 12 viajes en cada barco.

3.- El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas. Según el reglamento establecido por la federación de fútbol, como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante y por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo. Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20%, ¿cuántos aficionados locales y visitantes deben asistir para obtener el mayor importe con la venta de las entradas?

Resolución

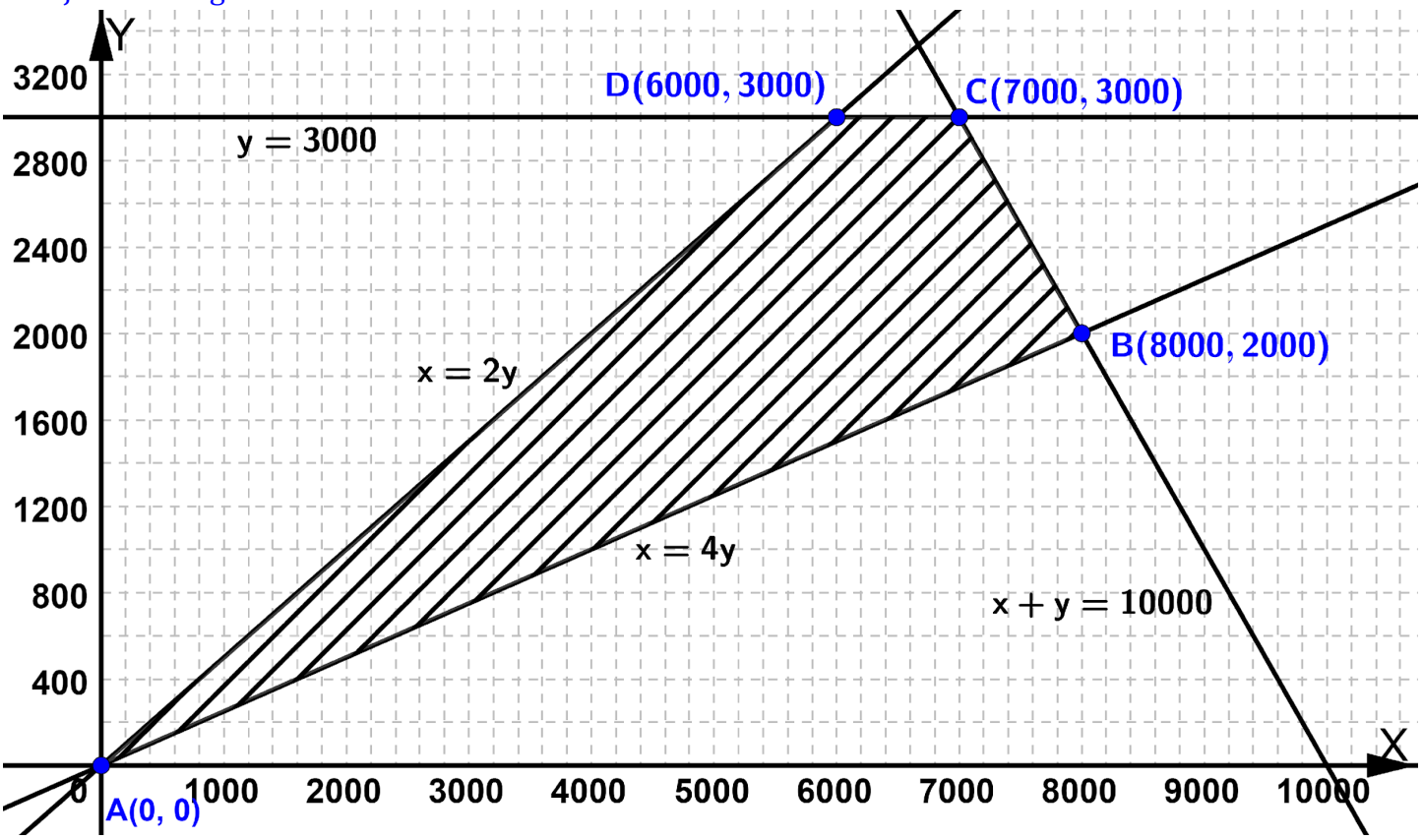
Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	importe (en €)
locales	x	80% de 50x = 40x
visitantes	y	50y
total	x + y	40x + 50y

Las restricciones son $\{x + y \leq 10000 \; y \leq 3000 \; 2y \leq x \leq 4y \; x \geq 0, y \geq 0$.

La función a optimizar (maximizar) es el importe de las ventas: f(x, y) = 40x + 50y

Dibujamos la región factible



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo f(x, y) = 15000x + 17000y:

f(A) = f(0, 0) = 40.0 + 50.0 = 0 f(B) = f(8000, 2000) = 40.8000 + 50.2000 = 420000

f(C) = f(7000, 3000) = 40.7000 + 50.3000 = 430000

f(D) = f(6000, 3000) = 40.6000 + 50.3000 = 390000

El importe máximo es 430000 € y se alcanza con 7000 aficionados locales y 3000 visitantes.

4.- Una empresa de pinturas quiere elaborar botes de pintura de dos colores nuevos: Júpiter y Minerva. Para ello, dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja. Para elaborar un bote de color Júpiter se necesitan 10 kg de pintura verde, 5 kg de morada y 5 kg de naranja. Para elaborar un bote de color Minerva se necesitan 5 kg de pintura verde y 5 kg de morada. Sabiendo que se obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de pintura Júpiter y 20 € por un bote de pintura Minerva, ¿cuántos botes de cada tipo deberá fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

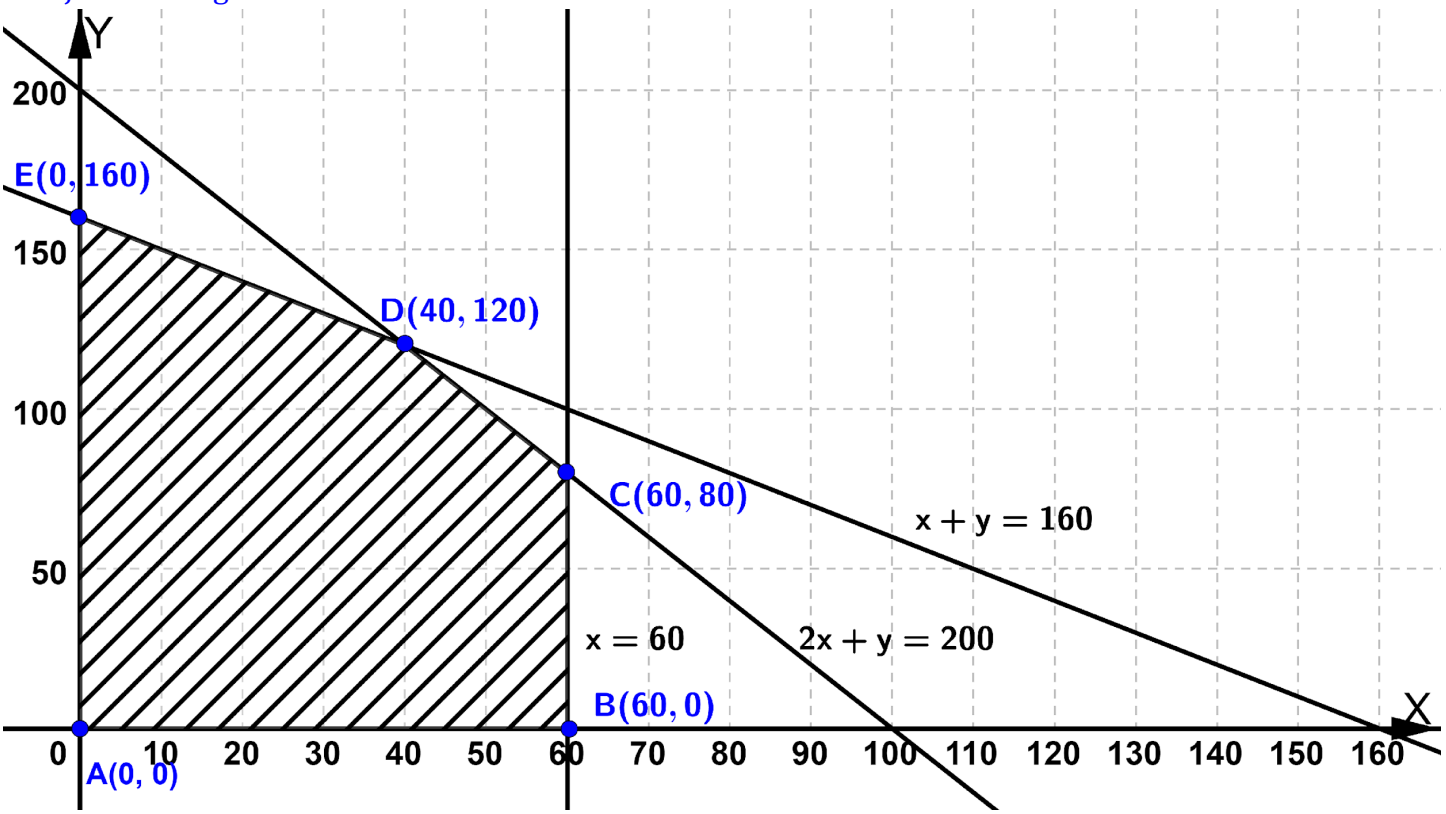
	nº de botes	kg de pintura verde	kg de pintura morada	kg de pintura naranja	beneficio (en €)
Júpiter	x	10x	5x	5x	30x
Minerva	y	5y	5y	0	20y
total	x + y	10x + 5y	5x + 5y	5x	30x + 20y

Las restricciones son

$\{10x + 5y \leq 1000 \rightarrow 2x + y \leq 200 \; 5x + 5y \leq 800 \rightarrow x + y \leq 160 \; 5x \leq 300 \rightarrow x \leq 60 \; x \geq 0, y \geq 0$.

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 30x + 20y$

Dibujamos la región factible



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo $f(x, y) = 30x + 20y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 30.0 + 20.0 = 0 \qquad f(B) = f(60, 0) = 30.60 + 20.0 = 1800$$

$$f(C) = f(60, 80) = 30.60 + 20.80 = 3400 \qquad f(D) = f(40, 120) = 30.40 + 20.120 = 3600$$

$$f(E) = f(0, 160) = 30.0 + 20.160 = 3200$$

El beneficio máximo es 3600 € y se alcanza con 40 botes de pintura Júpiter y 120 de pintura Minerva.

5.- (prueba ordinaria) Sean la función $F(x, y) = 5x - 3y$ y la región del plano definida mediante las inecuaciones $2x - 3y \leq 1$; $4x + y \leq 9$; $x + y \leq 5$; $9x - y \geq 0$; $y \geq 0$

a) Dibuje la región R y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$2x - 3y \leq 1 \rightarrow$ Recta: $2x - 3y = 1$

$x = -1$, $2(-1) - 3y = 1$, $y = -1$
$y = 1$, $2x - 3.1 = 1$, $x = 2$

x	−1	2
y	−1	1

$(0, 0) \rightarrow 2.0 - 3.0 \leq 1$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$4x + y \leq 9 \rightarrow$ Recta: $4x + y = 9$

$x = 0$, $4.0 + y = 9$, $y = 9$
$y = 1$, $4x + 1 = 9$, $x = 2$

x	0	2
y	9	1

$(0, 0) \rightarrow 4.0 + 0 \leq 9$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + y \leq 5 \rightarrow$ Recta: $x + y = 5$

x	0	5
y	5	0

$x = 0, 0 + y = 5$, $y = 5$
$y = 0, x + 0 = 5, x = 5$

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 5$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$9x - y \geq 0 \rightarrow$ Recta: $9x - y = 0$

x	0	1
y	0	9

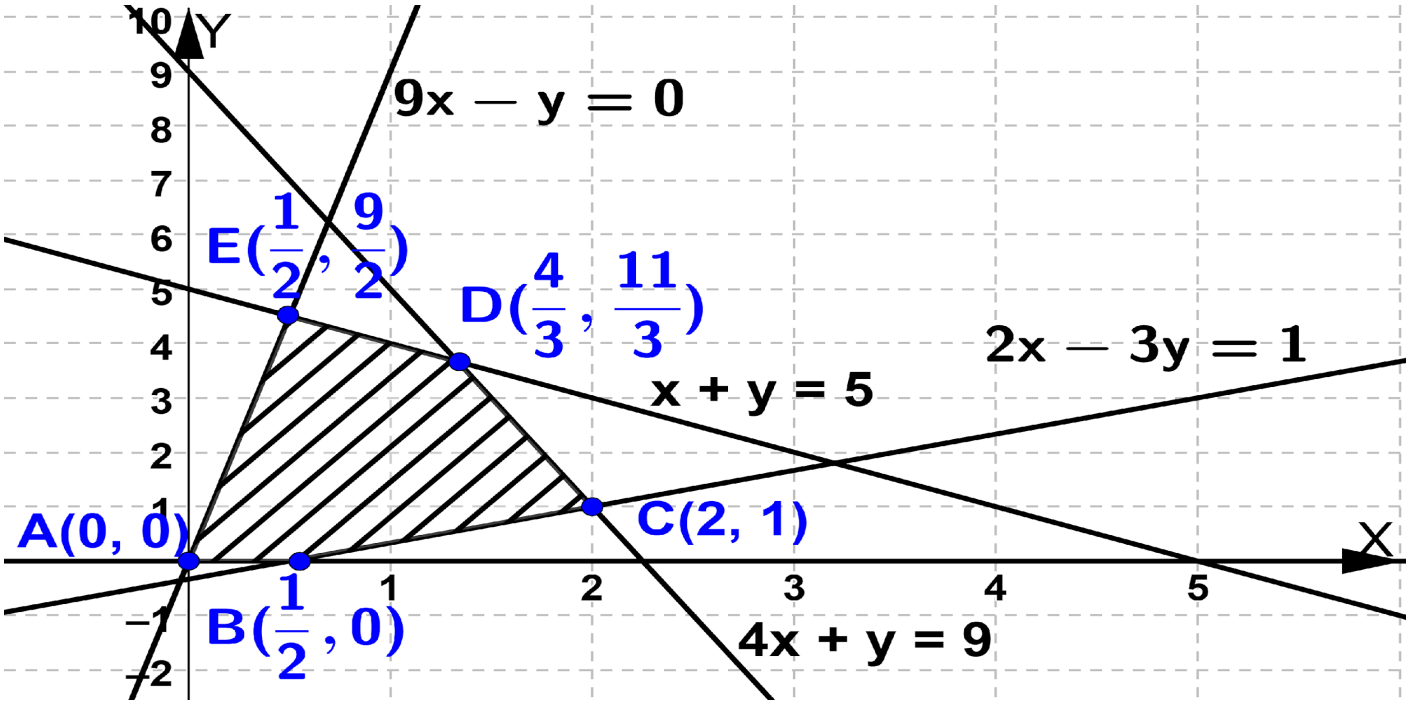
$x = 0$, $9.0 - y = 0$, $y = 0$
$y = 9$, $9x - 9 = 0$, $x = 1$

$(1, 0) \rightarrow 9.1 - 0 \geq 0$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) ; $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene a (0, 1).

Hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son –1, 0, 1, 2 y 5 y en el eje Y los valores son –1, 0, 1, 5 y 9. Después dibujamos la región factible.



Obtención de los vértices:

$\{9x - y = 0\, y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$ $\{2x - 3y = 1\, y = 0\ ,\ \ 2x - 3.0 = 1,\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\{4x + y = 9\, 2x - 3y = 1\ .\ 2 \rightarrow \ \{4x + y = 9\, 4x - 6y = 2\,, restando,\ 7y = 7,\ \ y = 1\ \ ;\ 4x + 1 = 9,$
.

$\{4x + y = 9\, x + y = 5\ , restando,\ 3x = 4\,,\ x = \frac{4}{3}\ \ ;\ \ \frac{4}{3} + y = 5,\ \ y = \frac{11}{3} \Rightarrow D\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$

$\{9x - y = 0\, x + y = 5\ , sumando,\ 10x = 5,\ x = \frac{1}{2}\ ;\ \ \frac{1}{2} + y = 5,\ \ y = \frac{9}{2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

b) Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1 ; 3,5) pertenecen a la región R

Resolución

Recordemos que la región R viene definida por las inecuaciones
$2x - 3y \le 1$; $4x + y \le 9$; $x + y \le 5$; $9x - y \ge 0$; $y \ge 0$

Vemos si las coordenadas de A cumplen todas las inecuaciones de la región R:
$2.2 - 3.2 = -2 \le 1$ (SÍ) ; $4.2 + 2 = 10 \le 9$ (NO).

Luego, no es necesario seguir comprobando, A ∉ R porque no cumple la 2ª inecuación.

Vemos si las coordenadas de B cumplen todas las inecuaciones de la región R:
$2.1 - 3.3{,}5 = -8{,}5 \le 1$ (SÍ) ; $4.1 + 3{,}5 = 7{,}5 \le 9$ (SÍ)
$1 + 3{,}5 = 4{,}5 \le 5$ (SÍ) ; $9.1 - 3{,}5 = 5{,}5 \ge 0$ (SÍ) ; $3{,}5 \ge 0$ (SÍ)

Luego, B ∈ R porque cumple todas las inecuaciones

c) Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores

Resolución

Recordemos que los vértices de la región R son $A(0,\ 0)$, $B\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $C(2,\ 1)$, $D\left(\frac{4}{3},\ \frac{11}{3}\right)$ y $E\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

Sabemos que $F(x, y) = 5x - 3y$ alcanza los valores máximo/mínimo en los vértices.

Veamos en qué vértices los alcanza:

$F(A) = F(0,\ 0) = 5.0 - 3.0 = 0$ $\quad F(B) = F\left(\frac{1}{2},\ 0\right) = 5.\frac{1}{2} - 3.0 = \frac{5}{2} = 2,5$

$F(C) = F(2,\ 1) = 5.2 - 3.1 = 7$ $\quad F(D) = F\left(\frac{4}{3},\ \frac{11}{3}\right) = 5.\frac{4}{3} - 3.\frac{11}{3} = \frac{-13}{3} \cong -4,33$

$F(E) = F\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right) = 5.\frac{1}{2} - 3.\frac{9}{2} = \frac{-22}{2} = -11$.

Luego, el valor máximo de F en R es 7, y se alcanza en $C(2,\ 1)$, y el valor mínimo es -11 y se alcanza en el punto $E\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

6.- (prueba extraordinaria) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad.
Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	anillos del 1er tipo	anillos del 2º tipo	total
nº de anillos	x	y	x + y
nº de piedras de mayor calidad	1x	3y	x + 3y
nº de piedras de menor calidad	2x	1y	2x + y
tiempo (en minutos)	20x	50y	20x + 50y
valor de la venta (en €)	21x	50y	21x + 50y

Las restricciones son $\{x + 3y \leq 200\ 2x + y \leq 150\ 20x + 50y \geq 1900 \rightarrow 2x + 5y \geq 190\ x \geq 20\ x \geq 0, y \geq 0$.

La función a optimizar (maximizar) es la función valor de la venta: $f(x, y) = 21x + 50y$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 3y \leq 200 \rightarrow$ Recta: $x + 3y = 200$ x: 50, 20 y: 50, 0 $x = 50,\quad 50 + 3y = 200,\ y = 50$ $y = 0,\quad x + 3.0 = 200,\quad x = 200$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 3.0 \leq 200$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene	$2x + y \leq 150 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 150$ x: 0, 75 y: 150, 0 $x = 0,\quad 2.0 + y = 150,\quad y = 150$ $y = 0,\quad 2x + 0 = 150,\quad x = 75$ $(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \leq 150$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

al (0, 0).	

$2x + 5y \geq 190 \rightarrow$ Recta: $2x + 5y = 190$

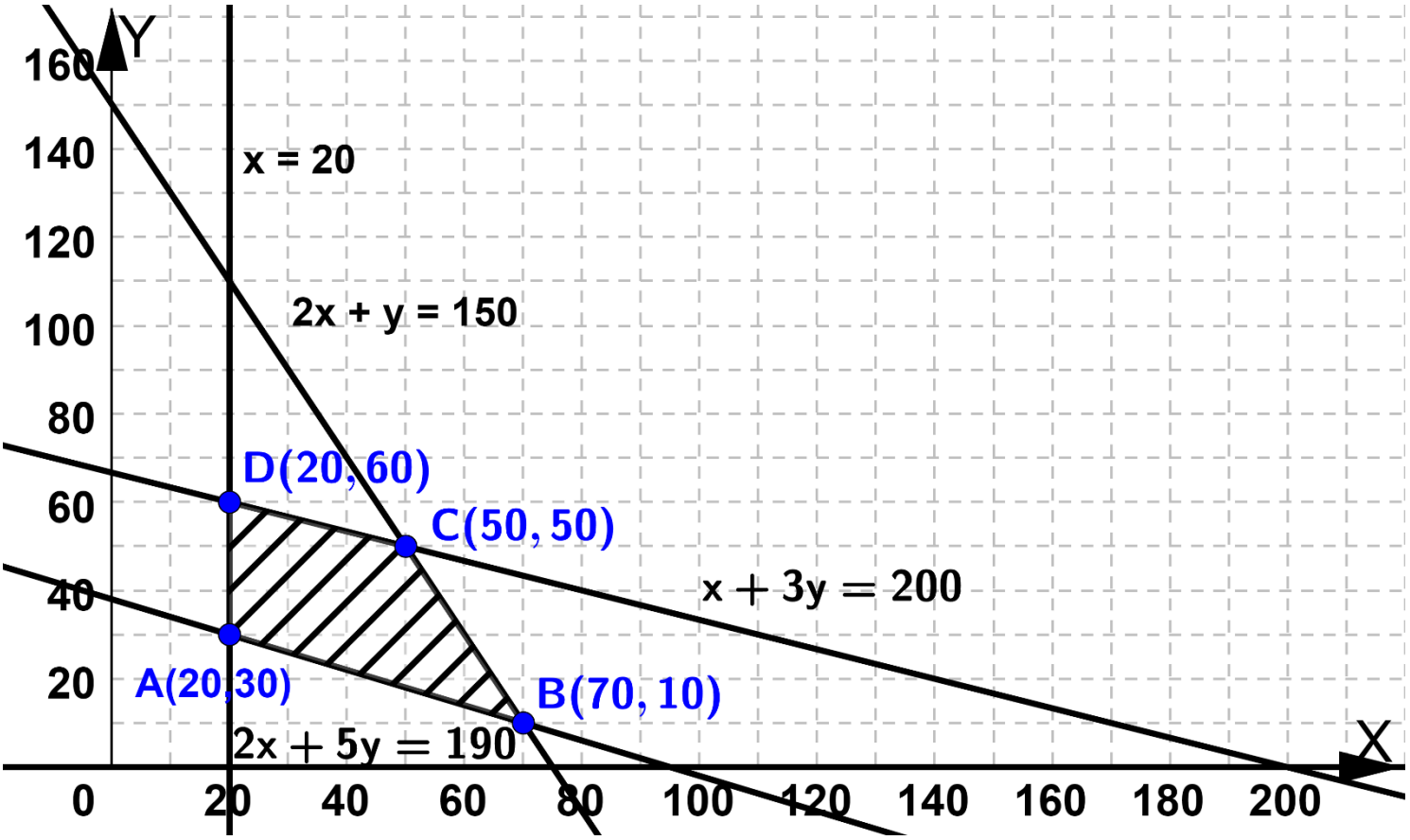
x	0	95
y	38	0

$x = 0, \quad 2.0 + 5y = 190, \quad y = 38$
$y = 0, \quad 2x + 5.0 = 190, \quad x = 95$

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 5.0 \geq 190$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$x \geq 20 \rightarrow$ Recta: $x = 20$, vertical que pasa por (20, 0). (0, 0)$\rightarrow 0 \geq 20$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) ; (1, 0) $\rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).
	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) ; (0, 1) $\rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{x = 20\ 2x + 5y = 190\ ; 2.20 + 5y = 190,\ y = 30 \rightarrow A(20,\ 30)$

$\{2x + 5y = 190\ 2x + y = 150\ ; 4y = 40,\ \ y = 10\ ; 2x + 10 = 150,\ \ x = 70 \rightarrow B(70,\ 10)$

$\{x + 3y = 200\ 2x + y = 150 \Rightarrow \{2x + 6y = 400\ 2x + y = 150\ ; 5y = 250,\ \ y = 50\ ; 2x + 50 = 150,\ \ x$

$\{x = 20\ x + 3y = 200\ ;\ 20 + 3y = 200,\ \ 3y = 180,\ \ y = 60 \rightarrow D(20,\ 60)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 21x + 50y$:

$f(A) = f(20, 30) = 21.20 + 50.30 = 1920$ $\quad$ $f(B) = f(70, 10) = 21.70 + 50.10 = 1970$

$f(C) = f(50, 50) = 21.50 + 50.50 = 3550$ $\quad$ $f(D) = f(20, 60) = 21.20 + 50.60 = 3420$

El máximo valor de la venta es 3550 € y se alcanza montando 50 anillos de cada tipo.