

Epreuve de PHYSIQUE

Filière M P

durée 4 heures

I. MECANIQUE : MODELISATION D'UN CABLE DE PRECONTRAINTE

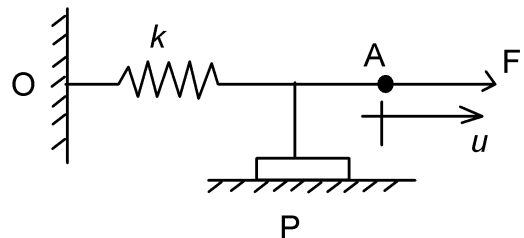
On étudie successivement un élément mécanique simple, puis la mise en série d'un grand nombre de ces éléments. On conclura sur la modélisation d'un câble de précontrainte.

A - Elément de base.

Le système est constitué de l'association d'un ressort linéaire de constante k et d'un patin P.

Ce patin est tel qu'il ne se déplace que s'il est soumis à une force F (cf schéma) supérieure à un seuil déterminé F_0 , force de frottement demeurant constante quel que soit le mouvement.

Une extrémité du ressort est fixée en un point O, l'autre extrémité A est soumise, à partir de sa position d'équilibre statique, à la force de traction longitudinale F . On note u le déplacement du point A.



1- Exprimer le déplacement u du point A en fonction de F .

2 - Faire le graphe de $u(F)$.

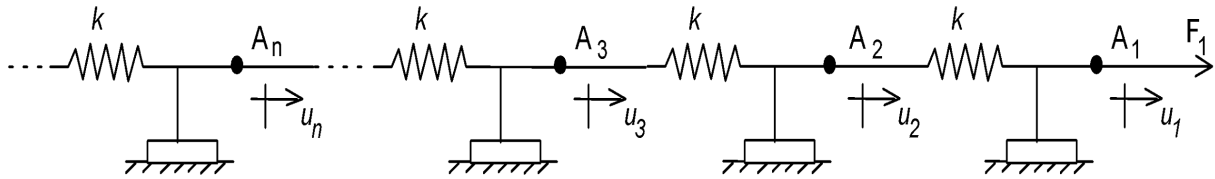
On fait croître la force F jusqu'à une valeur maximale F_M , puis on la laisse décroître progressivement jusqu'à $F = 0$.

3 - Décrire le comportement du système en fonction de la valeur atteinte par F_M .
On dégagera trois modes de fonctionnement selon la valeur atteinte par F_M .

4 - Expliciter avec précision la situation ci-dessus sur le graphe de $u(F)$.

B - Généralisation.

Le système est maintenant constitué de la mise en série de N éléments de base tels que décrits dans la partie A.



On note A_i les points de jonctions successifs et u_i leurs déplacements par rapport à l'état d'équilibre où les ressorts sont tous à leur longueur au repos.

On applique la force F_1 au nœud A_1 (cf schéma).

- 5 - Donner l'expression de l'équilibre des forces en chacun des nœuds A_i .
- 6 - En déduire la condition portant sur F_1 pour que soit observé un déplacement u_i du nœud A_i .
- 7 - Dans la situation de la question précédente, donner la condition pour laquelle le nœud A_{i+1} ne se déplace pas.
- 8 - Donner de même, la condition pour laquelle le nœud A_{i+1} est entraîné.
- 9 - On se place dans l'hypothèse de la question 7 : $u_i > 0$ et $u_{i+1} = 0$
Le nombre N d'éléments est supposé suffisant grand pour ne pas intervenir dans le problème.
Exprimer le déplacement u_i du nœud A_i en fonction de F_1, F_0, k et i .
- 10 - Faire le graphe de la fonction $u_i(F_1)$
[ce graphe est le premier modèle de la mise sous tension d'un câble de précontrainte].
- 11- Etablir, en fonction des paramètres F_0 et k , l'équation de la courbe continue $u_i = f(F_1)$ passant par l'ensemble des points de discontinuité constatés aux questions 9 et 10.
- 12 - Pour passer au comportement d'un câble continu, on assimile ce dernier à un assemblage d'éléments de base de longueur très faible δx .
Pour un matériau élastique linéaire (ex : acier), la raideur équivalente k de chaque élément est inversement proportionnelle à sa longueur δx .

$$k = \frac{\alpha}{\delta x}$$

On pose :

On considère également le frottement comme constant le long du câble.

On pose $F_0 = \beta \delta x$.

Etablir, dans ces hypothèses, l'expression de la fonction $u_i = g(F_1)$ lorsque $\delta x \rightarrow 0$

- 13 - Faire le graphe de $u_i = g(F_1)$
Commenter.

II. INVERSIONS DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

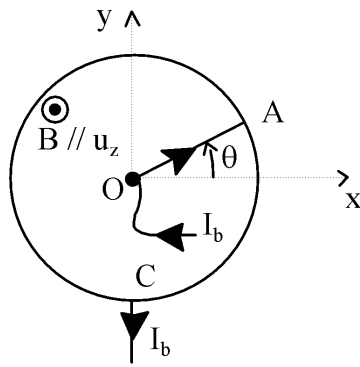


Figure 1

1. On envisage le dispositif de la figure 1 : une barre OA de longueur a et parfaitement conductrice est mobile dans le plan horizontal fixe xOy en rotation autour de l'axe fixe Oz confondu avec la verticale ascendante du lieu. On repère sa position par l'angle θ et on pose

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

. On choisit le sens positif du courant dans la barre de O vers A . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ uniforme et stationnaire.

1.a Exprimer le flux coupé $\delta\phi_c$ par le barre lors d'une variation $d\theta$ de sa position angulaire θ en fonction de B , a et θ .

1.b En déduire la force-électromotrice e du générateur équivalent à la barre entre O et A en fonction de B , a et ω .

2. On relie entre O et C le dispositif de la figure 1, équivalent à un générateur de tension parfait de fem e , au circuit électrique de la figure 2 qui comprend deux bobines résistives (R, L) et (R_b, L_b) et une résistance pure R_c . L'intensité I_b qui traverse la bobine (R_b, L_b) pénètre en O dans la barre de la figure 1 via un fil souple ; I_b ressort de la barre en A et est évacuée par un fil relié à la piste au point fixe C . La piste circulaire de la figure 1 étant parfaitement conductrice, les points A et C sont au même potentiel.

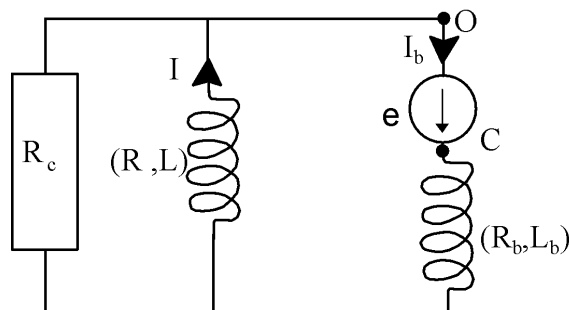


Figure 2

Etablir les expressions de $\frac{dI}{dt}$ et $\frac{dI_b}{dt}$ en fonction de I , I_b , e , L , L_b , R , R_b et R_c .

3. Soit J le moment d'inertie de la barre. Elle est soumise à l'action du champ magnétique $\mathbf{B}$,

à l'action d'un couple de frottements $-f\dot{\theta}\mathbf{u}_z$, et d'un couple appliqué $C\mathbf{u}_z$, où C et f sont des constantes positives.

3.a Exprimer la force magnétique subie par un élément de la barre de longueur dr situé à la

Distance r de O , en fonction de B , dr et I_b .

3.b En déduire l'expression du moment Γ_m , par rapport à l'axe Oz des forces magnétiques subies par la barre en fonction de B , a et I_b . Vérifier qu'on aurait obtenu le même résultat en supposant que les forces magnétiques élémentaires sont équivalentes à une force unique appliquée au milieu de OA .

3.c Etablir l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de J , B , a , I_b , ω , f et C .

4. On suppose dans cette question d'une part que $R_c = \infty$ et donc que $I = I_b$ et d'autre part que $L_b = 0$ et $R_b = 0$. En outre, le champ B est en fait créé par la bobine (R, L) de telle sorte qu'on admet qu'on peut en première approximation écrire $B = kI$ dans les équations établies en **2** et **3.c**, où k est une constante positive.

4.a Vérifier que les équations établies en **1** et **2** se simplifient en :

$$L \frac{dI}{dt} = -RI + KI\omega \quad ; \quad J \frac{d\omega}{dt} = C - f\omega - KI^2$$

où K est une constante qu'on exprimera en fonction de k et a

4.b Etablir la relation :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \right) = C\omega - RI^2 - f\omega^2$$

et donner une interprétation concrète à chaque terme ainsi qu'à l'équation complète.

4.c Montrer qu'il existe un unique état stationnaire (I_s, ω_s) tel que $I_s = 0$ et déterminer ω_s en fonction des données.

4.d Pour étudier la stabilité de cet état stationnaire, on pose $\alpha = \omega - \omega_s$.

– En partant des équations de **4.a** et en éliminant les termes quadratiques tels que $I\alpha$ et I^2 , établir les équations différentielles linéaires dont sont solutions $I(t)$ et $\alpha(t)$ et vérifier qu'elles sont découplées.

– En déduire que l'état stationnaire est instable si C est supérieur à une valeur minimale C_m qu'on exprimera en fonction de K , f et R ; cette condition est supposée vérifiée dans la suite.

4.e Montrer qu'il existe deux états stationnaires (I_s, ω_s) tels que $I_s \neq 0$. Déterminer les valeurs correspondantes de ω_s et I_s en fonction des données. Quelle relation simple lie les deux états ? Commenter.

4.f Pour étudier la stabilité de l'état stationnaire déterminé en **4.e** et tel que $I_s > 0$, on pose $i = I - I_s$ et $\alpha = \omega - \omega_s$.

– En partant des équations de **4.a** et en éliminant les termes quadratiques tels que $i\alpha$ et i^2 , établir les équations différentielles linéaires dont sont solutions $i(t)$ et $\alpha(t)$.

– Chercher des solutions de la forme $i(t) = i_M \exp(qt)$ et $\alpha(t) = \alpha_M \exp(qt)$ avec $q \in \mathbb{C}$. Montrer que q est solution de :

$$JLq^2 + fLq + 2(KC - fR) = 0$$

– Que peut-on en conclure quant à la stabilité de l'état stationnaire? (On pourra par exemple raisonner par analogie avec un oscillateur amorti).

4.g La figure 3 donne l'allure du graphe de $I(t)$ pour une condition initiale $I(t=0) = I_0$ avec I_0 positive mais quelconque. Commenter en liaison avec les questions **4.d** et **4.f**.

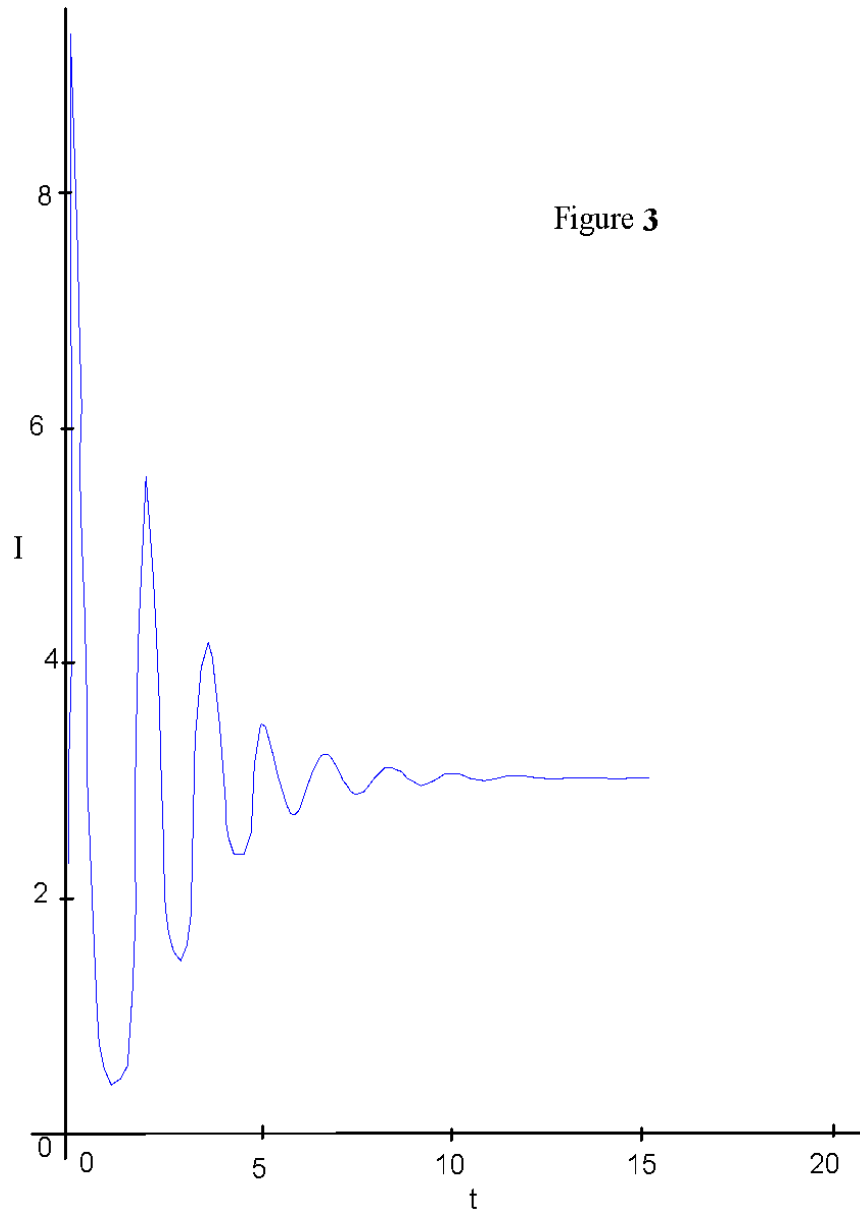


Figure 3

4.h En un point donné, le champ magnétique terrestre s'inverse de manière non-périodique au cours du temps, sur des durées géologiques. Le modèle avec $R_c = \infty$ rend-il compte de cet effet ? Même question pour le modèle $R_c \neq \infty$ pour lequel la figure 4 donne l'allure du graphe de $I(t)$.

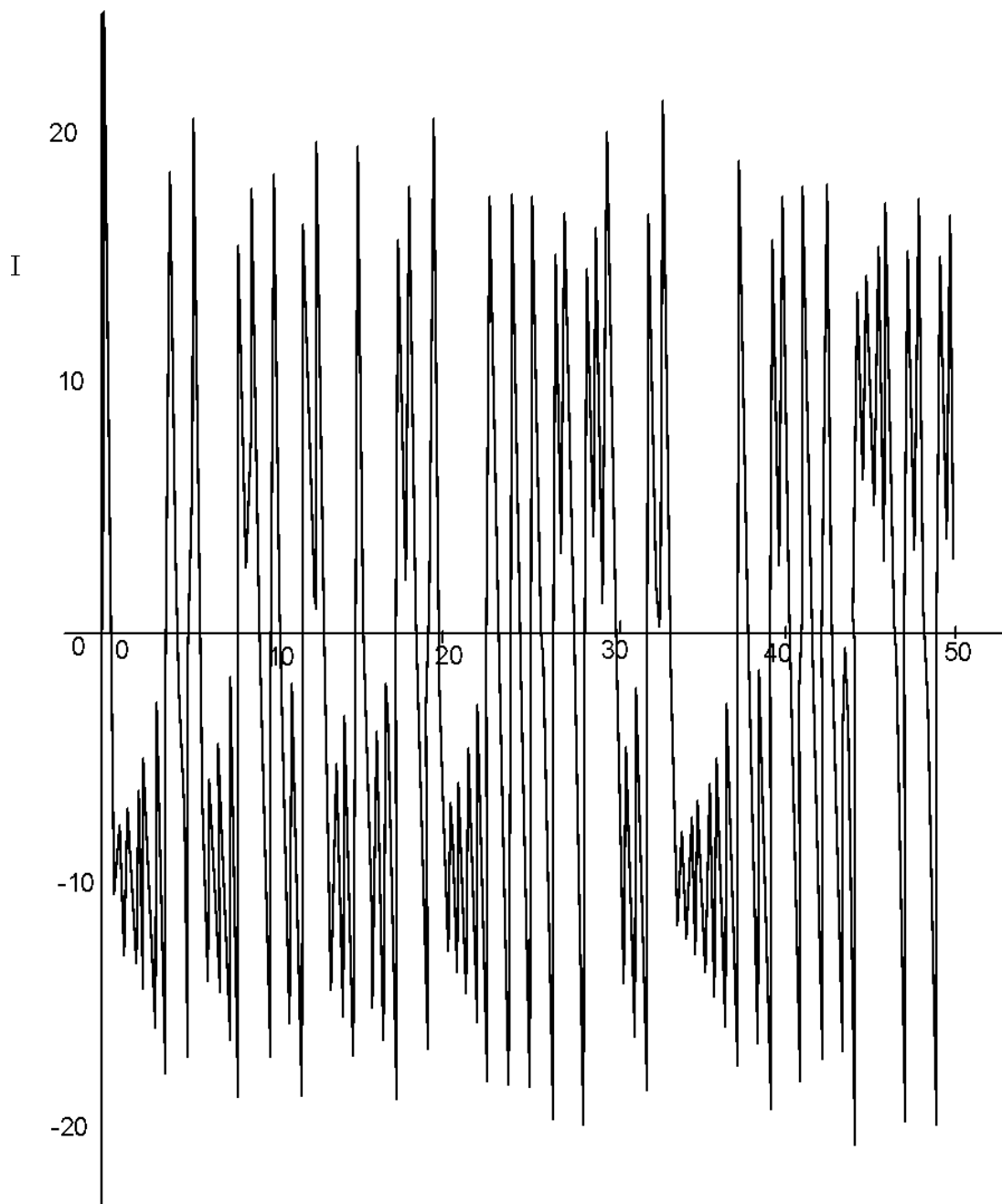


Figure 4