

國立高師大附中107學年度第2學期期末考高二數學科(自然組)試題

考試時間:80分鐘, 應考班級:高二仁~信

一、多重選擇題:每題答對得6分,只錯1個選項得4分,只錯2個選項得2分,其餘不給分,未作答者不給分,合計30分。

1.二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,下列哪些選項正確?

(1) $A\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ (2) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \end{bmatrix}$ (3) $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 15 \end{bmatrix}$ (4) $A\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

(5) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 時, $a+b+c+d = -5$ 。

2.已知拋物線方程式為 $y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$,下列哪些選項正確?

- (1) 對稱軸為 $x = 2$ (2)頂點 $(2, -2)$ (3)焦點 $(2, 0)$ (4)正焦弦長為8 (5)開口向上。

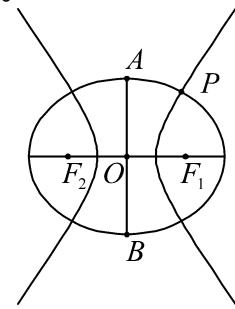
3.關於橢圓 $\Gamma: \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 10$,下列哪些選項正確?

- (1)中心為 $(3, 2)$ (2)長軸兩頂點為 $(8, 2)$ 及 $(-2, 2)$ (3)短軸兩頂點為 $(3, 5)$ 及 $(3, -1)$

(4)以兩正焦弦四個端點為頂點的矩形面積為 $\frac{168}{5}$ (5)斜率為2且與 Γ 相切之直線只有一條。

4.右圖中橢圓與雙曲線有共同的焦點 F_1, F_2 ,橢圓的中心為 O , A, B 是橢圓的二個頂點,且 $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 10$, $\overline{F_1F_2} = 6$ 。若 P 是橢圓與雙曲線的交點且 $\overline{PF_1} = 3$,下列哪些選項正確?

- (1)橢圓的長軸長為10 (2)橢圓的短軸長為6 (3) $\overline{AB} = 5$ (4) $\overline{PF_2} = 7$
(5)雙曲線的貫軸長為4。



5.兩二階方陣 A, B , A 表示平面上對直線 $L: y = -\sqrt{3}x$ 的鏡射變換,且 $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。下列哪些選項正確?

- (1) $AB = BA$ (2) $A + B = O$ (3) $-A$ 是 B 的反方陣

(4)方陣 B 所表示的平面變換將點 $(1, 0)$ 對應到點 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(5)方陣 B 所表示的平面變換為對直線 $L: y = \sqrt{3}x$ 的鏡射。

二、填充題:答案全對才給分

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得分	7	14	2	28	3	4	47	5	57	62	6	68	70

1.頂點 $(-1, 1)$,焦點 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 的拋物線方程式為_____。

2.設甲、乙兩地人口總數在這十年內都維持不變,而且兩地一直沒有外來人口,但其間互有遷移。經調查發現,乙地人口數一直是甲地人口數的兩倍,且知甲地人口中,每年有一成會遷居乙地,那麼在這十年中,乙地的人口每年有多少比例會遷居甲地_____?

3.設雙曲線 Γ 的兩焦點 $F_1(5, 0), F_2(-5, 0)$, P 為雙曲線上一點且位於第二象限,若 ΔF_1PF_2 的周長為26,且 $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 3:1$,則此雙曲線標準式為_____。

4. 坐標平面上一定點 $B(0, 2)$ 與圓 $C: x^2 + (y + 2)^2 = 36$ ，則過點 B 且與圓 C 相切之所有圓的圓心軌跡方程式為_____。

5. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \square a \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 為實數且行列式 $\det(A) = \frac{1}{2}$ 。則行列式 $\det(A - A^{-1})$ 之值為_____。

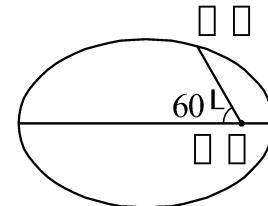
6. 在坐標平面上，將點 A 以原點為中心順時針旋轉 30° 後，再對直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 做鏡射，最後再以原點為中心，沿 x 軸方向與 y 軸方向均伸縮2倍後，得到新的坐標為 $(1, 0)$ ，則點 A 原來的坐標為_____。

7. 雙曲線 Γ_1 與另一雙曲線 $\Gamma_2: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 有相同焦點，且其共軸長為4，則 Γ_1 的標準式為_____。

8. 市場上有甲、乙兩款手機，根據資料顯示，甲款手機的使用者每年有 20% 改使用乙款，乙款手機的使用者每年有 30% 改使用甲款。若第一年甲款手機的市佔率是 40% ，乙款手機的市佔率是 60% ，則長期而言，甲款手機的市佔率為_____。

9. 設 F 為拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$ 的一焦點， P 是 Γ 上之動點，已知 $A(6, 4)$ ，則 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 的最小值為_____。

10. 某一彗星的軌道為一橢圓，而以太陽為焦點。設此彗星與太陽的最近距離為100萬公里，最遠距離為700萬公里，則當此彗星與太陽之連線和橢圓的長軸成 60° 夾角時(如圖)，彗星與太陽的距離為_____萬公里。



11. 已知一拋物線的焦距為6，若有一等腰三角形的三頂點均在這拋物線上且重心在拋物線的焦點，則此三角形面積為_____。

12. 雙曲線 Γ 與橢圓 $\frac{(x-1)^2}{123} + \frac{(y-2)^2}{98} = 1$ 共焦點，且一漸近線斜率為 $\frac{4}{3}$ ，則 Γ 的標準式為_____。

13. 小明家正東邊210公尺處是學校，另外有相距110公尺的兩家超商，離家比較近的超商是在另一超商的正西方，小明發現，無論從家到哪一家超商買早餐，然後至學校的總距離都是330公尺，則小明家到最近的那一家超商的距離是_____公尺。

國立高師大附中107學年度第2學期期末考高二數學科
答案卷(自然組)

高二__班 座號:__ 姓名:__

一、多重選擇題：每題答對得6分，只錯1個選項得4分，只錯2個選項得2分，其餘不給分，未作答者不給分，合計30分。

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

24	24	124	145	123
----	----	-----	-----	-----

二、填充題: 答案全對才給分

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	12	1
得分	7	14	2	28	3	4	47	5	57	62	6	68	7

1	2	3
$(y-1)^2 = 2(x+1)$	5 %	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
4	5	6
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{9}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
7	8	9
$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$	60 %	8
10	11	12
280	$54\sqrt{6}$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$
13		
130		