

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 1999

Concours en Physique et chimie
Epreuve de Physique

Durée : 4 Heures

Date : 7 Juin 1999

Heure: 8 H

Nb pages : 8

Barème : 1^{ère} Partie : 8/20

2^{ème} Partie : II-A : 1,5/20 ; II-B : 4/20 ; II-C : 5/20 ; II-D : 1,5/20

l'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le problème comporte deux parties largement **indépendantes** entre elles. Dans chaque partie certaines questions sont indépendantes. Il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour des questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

Données utiles :

- masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- masse du proton : $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- constante de Planck divisée par 2π : $\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Dans tout le problème, on désignera par (R) le référentiel galiléen du laboratoire (Oxyz) d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$.

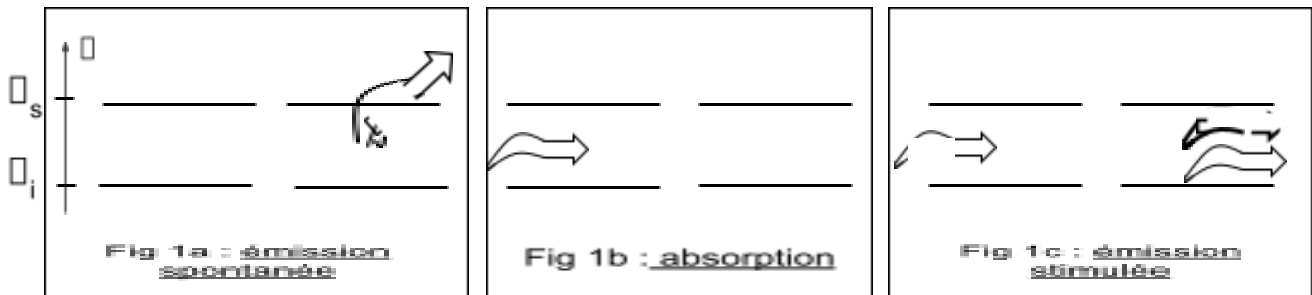
L'objet de ce problème est de présenter un modèle simplifié visant à établir, dans une approche classique, une analogie entre les interactions d'un rayonnement électromagnétique avec un milieu diélectrique et avec un milieu paramagnétique à deux niveaux d'énergie.

Le modèle d'un système à deux niveaux d'énergie est très utile en physique. Il permet, en particulier, d'interpréter de manière très simple les deux effets : LASER (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) et MASER (**M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation).

Dans ce modèle, les transitions d'un atome entre deux niveaux d'énergie ϵ_i et ϵ_s ($\epsilon_i < \epsilon_s$) s'accompagnent d'une émission ou d'une absorption d'un photon de fréquence $\nu_0 = \frac{\epsilon_s - \epsilon_i}{h}$. Les trois processus mettant en jeu ce photon sont les suivants:

- *émission spontanée* : un atome qui se trouve à un instant t dans le niveau d'énergie supérieur ϵ_s peut "redescendre" dans le niveau inférieur ϵ_i en émettant spontanément un photon de fréquence ν_0 (fig 1a).
- *absorption et émission stimulée* : un atome qui se trouve dans le niveau inférieur ϵ_i peut être excité vers le niveau supérieur ϵ_s par absorption d'un photon du rayonnement électromagnétique de fréquence ν_0 auquel il est soumis (fig 1b).

L'expérience montre que la présence du rayonnement de fréquence ν_0 peut aussi provoquer le phénomène inverse : c'est l'émission "induite" ou "stimulée" de photons de fréquence ν_0 (fig 1c) par les atomes qui se trouvent dans le niveau supérieur ϵ_s et qui se "dés excitent" en passant au niveau inférieur ϵ_i . Le faisceau de photons émis est parfaitement cohérent.



Dans une première partie du problème, on s'intéresse à l'interaction d'une onde électromagnétique avec un milieu diélectrique non polaire.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la résonance paramagnétique de spin $\frac{1}{2}$ dont l'intérêt est multiple. En particulier ce phénomène conduit à des applications fondamentales, industrielles et médicales dont la plus connue est l'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique). Le spin joue, en effet, par ses effets magnétiques, le rôle d'une véritable sonde locale sensible à son environnement au sein de la matière.

↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑

1^{ère} Partie : Interaction d'une onde électromagnétique avec un milieu diélectrique

Modèle de l'électron élastiquement lié

On considère un diélectrique peu dense non polaire assimilé à un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique. Dans ce milieu les électrons atomiques, de masse m_e et de charge $q = -e$, intervenant dans le phénomène étudié, seront considérés équivalents et liés aux noyaux supposés fixes. Un électron perturbé est soumis à une force de rappel : $f_1 = -m_e \omega_0^2 s$ où s représente son déplacement, supposé faible, par rapport à sa position d'équilibre et ω_0 la pulsation d'une transition d'absorption. L'électron est soumis d'autre part à une

force de frottement de type visqueux : $f_2 = -\frac{m_e}{\tau} \frac{ds}{dt}$ où τ désigne la durée de relaxation.

Dans cette partie, on s'intéresse à la polarisation électronique du milieu en régime forcé sous l'action du champ électrique d'une onde électromagnétique plane et monochromatique de pulsation ω (dans le domaine optique) se propageant suivant l'axe (Oz) dans la direction des z croissants.

En notation complexe, le champ électrique de l'onde peut se mettre sous la forme : $\underline{E}(z, t) = \underline{E}_0(z) e^{-j\omega t} e^{jkz}$ où $\underline{E}_0(z)$ représente l'amplitude complexe et j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

1. Calculer la fréquence ν_0 correspondant à l'émission d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,589 \mu\text{m}$. Comparer la période propre T_0 des oscillations au temps de relaxation $\tau = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ pour l'atome de sodium. Conclure.
2. a. L'électron étant lié au noyau dans l'atome de "rayon" a . On néglige les variations spatiales e^{jkz} du champ électrique $\underline{E}$, au niveau de l'atome. $\underline{k}$ désigne le vecteur d'onde. Justifier cette approximation.
- b. En régime sinusoïdal forcé, l'expression du déplacement d'un électron s'écrit : $\underline{s} = \underline{s}_0 e^{-j\omega t} e^{jkz}$ où $\underline{s}_0 = \underline{s}_0(\omega)$ est une grandeur complexe dépendante de ω . Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron. Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{s}_0(\omega)$.
- c. On désigne par $\underline{v} = \underline{v}_0 e^{-j\omega t} e^{jkz}$ le vecteur vitesse de l'électron. Montrer que $|\underline{v}_0| \ll a \omega$ et justifier pourquoi l'effet du champ magnétique de l'onde a été négligé.
3. a. Ecrire, en régime forcé, l'expression du vecteur polarisation complexe du milieu : $\underline{P}(\omega) = -N e \underline{s}$ où N désigne le nombre d'électrons par unité de volume. Justifier que $\underline{P}$ peut se mettre sous la forme $\underline{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}$ où $\chi_e(\omega)$ est la susceptibilité diélectrique complexe du milieu. Que traduit le caractère complexe de cette susceptibilité ?
- b. Mettre l'expression de la susceptibilité diélectrique complexe sous la forme : $\chi_e(\omega) = \chi_e'(\omega) + j \chi_e''(\omega)$ où $\chi_e'(\omega)$ et $\chi_e''(\omega)$ sont des grandeurs réelles qu'on exprimera en fonction de ω , ω_0 , τ et de la susceptibilité statique $\chi_{e0} = \chi_e(\omega = 0)$.
- c. Représenter, au voisinage de $\omega = \omega_0$, l'allure des graphes donnant $\chi_e'(\omega) / \chi_{e0}$ et $\chi_e''(\omega) / \chi_{e0}$ en fonction de ω . On assimilera $(\omega + \omega_0)$ à $2\omega_0$.

Absorption de l'énergie

4. a. Montrer que la puissance moyenne $\langle \underline{P}_d \rangle(\omega, z)$ absorbée par unité de volume du diélectrique en présence de l'onde peut se mettre sous la forme : $\langle \underline{P}_d \rangle(\omega, z) = \frac{1}{2} \text{Rél} \left(\frac{d\underline{P}}{dt} \cdot \underline{E}^* \right)$ où $\underline{E}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{E}$.

b. En déduire que : $\langle \mathbf{P}_d \rangle(\omega, z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega \chi_e''(\omega) |E_0(z)|^2$.

c. L'amortissement étant faible, $\langle \mathbf{P}_d \rangle(\omega)$ n'est donc appréciable qu'au voisinage immédiat de ω_0 .

Donner dans ce cas l'expression de $\langle \mathbf{P}_d \rangle(\omega, z)$ en fonction de ϵ_0 , τ , ω , ω_0 , χ_{e0} et $|E_0(z)|^2$.

d. Représenter la courbe donnant les variations de $\langle \mathbf{P}_d \rangle$ en fonction de ω , appelée courbe d'absorption.

En déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ de cette courbe et l'expression de la puissance volumique moyenne $\langle \mathbf{P}_d \rangle(\omega_0, z)$ absorbée à la résonance en fonction de ω_0 , χ_{e0} , $\Delta\omega$, ϵ_0 et $|E_0(z)|^2$.

5. a. Montrer que la moyenne du vecteur de Poynting $\vec{R}$ vérifie la relation suivante : $\langle \vec{R} \rangle = v_e \langle \mathbf{e}_{em} \rangle$ où v_e désigne la vitesse de l'énergie et $\langle \mathbf{e}_{em} \rangle$ est l'énergie électromagnétique volumique moyenne.

b. Sachant que dans le milieu étudié, $\langle \mathbf{e}_{em} \rangle = \langle \mathbf{e}_{em} \rangle(\omega, z) \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 |E_0(z)|^2$, exprimer $\langle \mathbf{P}_d \rangle(\omega_0, z)$

en

fonction de ω_0 , $\chi_e''(\omega_0)$ et $\langle \mathbf{e}_{em} \rangle(\omega_0, z)$.

c. Etablir un bilan d'énergie entre deux plans d'équations z et $z+dz$. En déduire que l'énergie volumique moyenne d'une onde électromagnétique de pulsation ω_0 , traversant le milieu, vérifie la loi :

$$\langle \mathbf{e}_{em} \rangle(\omega_0, z) = \langle \mathbf{e}_{em} \rangle_{(0)} e^{-\frac{\omega_0 \chi_e''(\omega_0) z}{c}}, \text{ où } \langle \mathbf{e}_{em} \rangle_{(0)} = \langle \mathbf{e}_{em} \rangle(\omega_0, z = 0)$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

On assimilera la vitesse v_e de l'énergie dans ce milieu à la célérité c de la lumière dans le vide.

6. Une étude approfondie conduit à modifier légèrement l'expression de $\chi_e(\omega)$ trouvée en 3. Si l'on considère que les atomes sont essentiellement répartis dans deux niveaux d'énergie ϵ_i et ϵ_s ($\epsilon_i < \epsilon_s$) à raison de N_i et N_s atomes par unité de volume et que la pulsation ω de l'onde reste très voisine de $\omega_0 = \frac{\epsilon_s - \epsilon_i}{\hbar}$, on montre que $\chi_e(\omega)$ diffère très peu de l'expression :

$$\chi_e(\omega) = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_0} (N_i - N_s) f \frac{1}{\omega_0 - \omega - \frac{j}{2\tau}}$$

a. Indiquer la dimension du coefficient f appelé force d'oscillateur d'un électron atomique.

b. Le milieu étudié est maintenu à une température T . Les populations volumiques N_i et N_s des deux niveaux obéissent à la répartition de Boltzmann, c'est à dire $N(\epsilon)$ est proportionnelle au facteur $e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}$,

où

k_B est la constante de Boltzmann. Déterminer le signe de $(N_i - N_s)$ à l'équilibre thermodynamique.

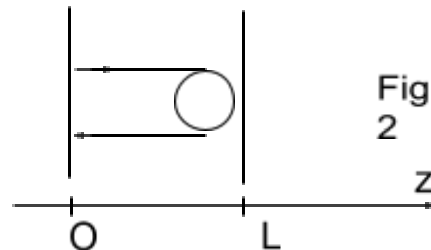
En déduire que le milieu est absorbant comme dans le modèle classique.

Principe de l'effet Laser

c. En dehors de l'équilibre thermodynamique, on peut réaliser par un procédé de "pompage", une inversion de population ($N_i < N_s$), montrer que l'onde de pulsation ω_0 n'est plus absorbée mais amplifiée au cours de la propagation. C'est l'effet Laser.

d. Deux miroirs plans sont placés perpendiculairement à l'axe (Oz) (cf. fig 2). L'un parfait est placé en $z = 0$ et l'autre de coefficient de réflexion en énergie $R < 1$ en $z = L$. L'espace entre ces deux plans enfermant le milieu diélectrique amplificateur, constitue une cavité Laser uniaxe dans laquelle une onde électromagnétique de pulsation ω_0 , se propageant parallèlement à l'axe (Oz) effectue des allers et retours par réflexions sur les deux miroirs. Etablir, la condition pour que l'onde puisse être amplifiée après un aller-retour (fig 2), dite condition LASER :

$$(N_s - N_i) > \frac{\epsilon_0 m_e c}{2 \tau e^2 f L} \ln\left(\frac{1}{R}\right)$$



2^{ème} Partie : Résonance magnétique - Effet MASER

Dans toute cette partie, on s'intéresse à un échantillon isolant paramagnétique contenant un très grand nombre de particules dotées d'un même moment magnétique permanent $\vec{\mu}$.

II-A- Moment magnétique intrinsèque d'une particule chargée

Le spin, grandeur caractéristique d'une particule, est le moment cinétique propre ou intrinsèque de celle-ci. Dans le modèle classique, on suppose que l'électron tourne autour d'un axe passant par son centre, comme la terre qui tourne sur elle-même. On le modélise comme une sphère de centre O et de rayon r_0 , tournant autour d'un de ses diamètres Δ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. La charge (-e) et la masse m_e de l'électron sont supposées uniformément réparties en volume.

On donne $I_\Delta = \frac{2}{5} m_e r_0^2$ le moment d'inertie de la sphère pleine et homogène par rapport à l'un de ses diamètres.

7. a. Montrer que, dans le modèle classique, le moment magnétique $\vec{\mu}$ de l'électron peut se mettre sous la

forme : $\vec{\mu} = -\frac{1}{5} e r_0^2 \vec{\Omega}$. On donne : $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

- b. Ecrire l'expression du vecteur moment cinétique de spin de l'électron noté $\vec{S}$ en fonction du vecteur $\vec{\Omega}$.

8. a. Vérifier que : $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ où γ est le rapport gyromagnétique de spin.

En réalité, le rapport gyromagnétique γ de l'électron est sensiblement le double de celui prévu par le modèle classique adopté précédemment.

D'autre part, l'expérience montre que la projection du moment cinétique de spin $\vec{S}$ de l'électron, suivant une

direction, par exemple $\vec{Oz}$, admet deux valeurs possibles

$$\begin{cases} S_z = +\frac{\hbar}{2} \\ S_z = -\frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

En déduire que la projection du moment magnétique $\vec{\mu}$ de l'électron suivant une direction, admet deux

valeurs possibles données par : $\mu_e = \pm \mu_B$ où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr.

b. On adopte le même modèle pour le proton, particule de charge $q = +e$ et de masse m_p et on admet que les moments cinétiques de spin de l'électron et du proton sont égaux.

Donner un ordre de grandeur du rapport $\frac{|\mu_e|}{|\mu_p|}$ des modules des projections des moments magnétiques de spin $\vec{\mu}_e$ de l'électron et $\vec{\mu}_p$ du proton. Que peut-on dire de l'origine de l'essentiel des propriétés magnétiques de la matière ?

II-B- Effet d'un champ magnétique uniforme et constant

Dans toute la suite du problème, l'échantillon paramagnétique constitué de particules identiques de même moment magnétique de spin $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ est plongé dans un champ magnétique externe, constant et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$.

Précession de Larmor

9. a. Quelle est l'action mécanique exercée par le champ $\vec{B}_0$ sur un dipôle magnétique de moment dipolaire

magnétique $\vec{\mu}$?

En déduire, par application du théorème du moment cinétique, l'équation d'évolution de $\vec{\mu}$.

On posera $\omega_0 = -\gamma B_0 = \omega_0 \vec{u}_z$, où ω_0 est la pulsation de Larmor.

b. Soit $\vec{M}$ le vecteur intensité d'aimantation de l'échantillon défini comme étant la somme des moments

magnétiques dipolaires par unité de volume. Montrer que sous l'effet du champ $\vec{B}_0$, l'équation d'évolution

de $\vec{M}$ est identique à celle trouvée pour $\vec{\mu}$.

En déduire que le module $\|\vec{M}\|$ et la projection M_z de $\vec{M}$ sur $\vec{Oz}$ sont indépendants du temps.

c. Décrire la nature du mouvement du vecteur $\vec{M}$ (dont l'origine est fixée en O). Quel est le vecteur vitesse angulaire de ce mouvement ?

Paramagnétisme à deux niveaux d'énergie

L'échantillon est à l'équilibre thermodynamique maintenu à une température T .

10. a. Donner l'expression de l'énergie potentielle ϵ d'une particule de moment magnétique $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ ($S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$), dans le champ magnétique externe $\vec{B}_0$.

En déduire les deux valeurs possibles ϵ_i et ϵ_s ($\epsilon_i < \epsilon_s$) de ϵ en fonction de B_0 et $\mu = |\gamma| \frac{\hbar}{2}$.

b. On note N_i (resp. N_s) le nombre de particules par unité de volume d'énergie ϵ_i (resp. ϵ_s).

En utilisant la loi de répartition de Boltzmann, exprimer N_i et N_s en fonction de μ , B_0 , $k_B T$ et N où N désigne le nombre total de particules paramagnétiques par unité de volume.

c. Justifier qu'à l'équilibre thermodynamique, l'aimantation $\vec{M}$ est orientée suivant le champ $\vec{B}_0$.

Sa valeur sera désignée par $M_0 = M_0 \vec{u}_z$. Exprimer M_0 en fonction de N , μ , B_0 et $k_B T$.

d. Application numérique : $B_0 = 1 \text{ T}$, $\mu = \mu_B$. Calculer $\frac{N_i}{N_s}$ pour $T = 300 \text{ K}$ et $T = 2 \text{ K}$.

11.

a. Donner l'expression de $(N_i - N_s)$ en fonction de N , μ , B_0 et $k_B T$, dans le cas $\frac{\mu B_0}{k_B T} \ll 1$.

En déduire que la susceptibilité paramagnétique statique χ_m de l'échantillon, définie par : $M_0 = \chi_m \frac{B_0}{\mu_0}$,

obéit à la loi de Curie en C/T où C est une constante que l'on exprimera en fonction de la perméabilité du vide μ_0 , N , μ et k_B .

b. Application numérique : $\mu = \mu_B$, $N = 6 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Calculer un ordre de grandeur de χ_m à $T = 300 \text{ K}$.

12. Vérifier que la fréquence d'un rayonnement électromagnétique dont les photons absorbés permettraient aux particules de passer du niveau d'énergie ϵ_i au niveau ϵ_s est égale à $\nu_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi}$ où $\omega_0 = -\gamma B_0$.

II-C- Influence d'un champ tournant superposé au champ magnétique fixe

Une technique inventée par Rabi dans les années 1930 permet de mesurer avec précision la fréquence d'absorption ν_0 grâce à un phénomène de résonance. Dans toute la suite du problème, l'échantillon paramagnétique est soumis, en plus du champ statique $\vec{B}_0$ à un autre champ magnétique de faible intensité $\vec{B}_1(t)$ d'amplitude $B_1 \ll B_0$, tournant à la vitesse angulaire ω dans le plan xOy (cf-fig.3).

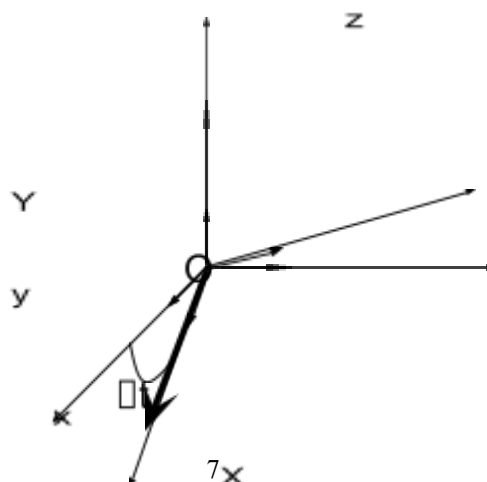


Fig.3

Le trièdre (R') OXYZ, de vecteurs directeurs $\vec{u}_X$, $\vec{u}_Y$, $\vec{u}_Z$, est obtenu à partir du trièdre (R) Oxyz par une rotation autour de Oz avec la vitesse angulaire ω [$\vec{u}_X$ porte le champ tournant $\vec{B}_1(t)$]. A l'instant $t = 0$, (R) et (R') sont confondus.

- 13. Ecrire, dans le repère (R), l'équation d'évolution de l'aimantation $\vec{M}(t)$ en présence du champ total : $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$. En déduire que dans (R') l'équation du mouvement relatif du vecteur $\vec{M}(t)$, d'origine O,

s'écrit sous la forme :
$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{(R')} = \vec{M} \wedge [(\omega - \omega_0)\vec{u}_Z - \omega_1\vec{u}_X]$$
 où $\omega_1 = -\gamma B_1$ et $\omega_0 = -\gamma B_0$.
Vérifier qu'il s'agit d'un mouvement de précession dans (R') autour d'un champ magnétique efficace $\vec{B}_{\text{eff}}$ que l'on déterminera.

- 14. Afin de rendre compte dans ce qui suit des phénomènes de relaxation, l'équation d'évolution de $\vec{M}(t)$ dans (R') peut se mettre approximativement sous la forme :

$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{(R')} = \vec{M} \wedge [(\omega - \omega_0)\vec{u}_Z - \omega_1\vec{u}_X] - \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{\tau}$$

, où τ représente la durée de relaxation et

$\vec{M}_0 = M_0 \vec{u}_Z$ la valeur de $\vec{M}$ à l'équilibre thermodynamique en présence de $\vec{B}_0$.

a. Interpréter qualitativement la durée τ . Commenter le cas $\tau \rightarrow \infty$.

b. Ecrire le système d'équations différentielles satisfaites par les composantes M_X , M_Y et M_Z de $\vec{M}$ dans (R').

- 15. a. En déduire les solutions de ces équations correspondant au régime stationnaire qui s'établit dans (R') :

$$(M_X)_S = \frac{\omega_1 \tau^2 (\omega_0 - \omega) M_0}{1 + \omega_1^2 \tau^2 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2}$$

$$(M_Y)_S = - \frac{\omega_1 \tau M_0}{1 + \omega_1^2 \tau^2 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2}$$

$$(M_Z)_S = M_0 - \frac{\omega_1^2 \tau^2 M_0}{1 + \omega_1^2 \tau^2 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2}$$

b. Représenter sommairement les variations de $(M_X)_S$, $(M_Y)_S$ et $(M_Z)_S$ en fonction de ω au voisinage de ω_0 . Commenter.

- 16. On considère désormais le mouvement absolu de l'aimantation $\vec{M}(t)$. En exprimant les composantes $M_x(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$ de $\vec{M}(t)$ dans (R), montrer que le régime stationnaire dans (R') est un régime forcé de pulsation ω dans (R).

Absorption d'énergie à la résonance magnétique

En réalité, le champ $\vec{B}_1(t)$ représente la composante magnétique d'une onde électromagnétique transverse se propageant suivant l'axe (Oz).

- 17. a. Calculer dans (R) les composantes du couple élémentaire $\vec{dC}$ exercé par $\vec{B}_1$ sur le dipôle en O de moment magnétique $\vec{M}$ δV où δV est un élément de volume et $\vec{M}$ est l'aimantation de l'échantillon.

b. En déduire, que dans (R), la puissance volumique $P_m(\omega)$ absorbée par l'échantillon en régime

$$P_m(\omega) = - \frac{\gamma B_1^2 \tau M_0 \omega}{1 + \gamma^2 B_1^2 \tau^2 + (\omega_0 - \omega)^2 \tau^2}$$

forcé s'écrit sous la forme :

- 18. On se placera, dans la suite, dans le cas où $\gamma^2 B_1^2 \tau^2 \ll 1$.

a. Donner l'allure du graphe $P_m(\omega)$ au voisinage de ω_0 . En déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ de la courbe dite largeur de raie d'absorption.

b. Montrer que la puissance volumique $P_m(\omega_0)$ absorbée par l'échantillon autour de la pulsation ω_0

$$P_m(\omega_0) = \frac{2 B_1^2 \omega_0^2 \chi_m}{\mu_0 \Delta\omega}$$

s'écrit sous la forme :

c. Etablir une analogie entre les expressions de $P_m(\omega_0)$ et de $\langle P_d \rangle(\omega_0, z)$ obtenue en 4-b.

- 19. a. Une méthode pratique consiste à faire un balayage de la pulsation ω , pour un champ $\vec{B}_0$ fixé afin de visualiser le signal de résonance sur un oscilloscope. Calculer numériquement un ordre de grandeur de la

fréquence de résonance $\nu_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi}$ et de la longueur d'onde λ_0 correspondante. On distinguera le cas des électrons et celui des protons. On donne $B_0 = 1$ T.

b. Cette découverte a permis à Rabi de recevoir le prix Nobel de 1944. Son travail a été décrit comme " *un fantastique exploit d'avoir pu établir un contact radio avec les constituants ultimes de la matière, en trouvant leur fréquence de réception*". Commenter cette citation.

II-D- Principe du fonctionnement MASER

L'échantillon paramagnétique à deux niveaux étudié précédemment, placé dans une cavité résonnante, est soumis au champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. Dans cette cavité règne un champ magnétique

oscillant $\vec{B}_1 \cos(2\pi\nu_0 t)$ orthogonal à $\vec{B}_0$ ($B_1 \ll B_0$), où $\nu_0 = \frac{|\gamma B_0|}{2\pi}$ est la fréquence de résonance d'absorption de l'échantillon constitué de particules identiques de même moment magnétique de spin $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$

$$(S_z = \pm \frac{\hbar}{2}).$$

$$\frac{\mu B_0}{k_B T} \ll 1.$$

L'échantillon, occupant le volume total de la cavité, est maintenu à une température T telle que $\frac{\mu B_0}{k_B T} \ll 1$. Par un procédé de "pompage" approprié, grâce à un apport d'énergie extérieur, on prépare les particules dans l'état d'énergie supérieur ϵ_s , afin d'obtenir une inversion des populations volumiques ($N_s > N_i$).

- 20. a. Si l'on suppose que l'inversion des populations est maintenue en permanence, expliquer qualitativement pourquoi l'échantillon est alors capable de fournir la puissance volumique $P_m(\omega_0)$, trouvée en 18-b, au lieu de la prélever.

b. La variation de l'intensité $I(z)$ du rayonnement, au centre de la raie de résonance d'absorption de fréquence ν_0 et de largeur $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$, s'écrit sous la forme $\frac{dI(z)}{dz} = -\sigma I(z)$ où $\sigma = \frac{\nu_0}{2\Delta\nu} (N_i - N_s) A_i$

est

une constante. A_i représente le coefficient d'Einstein d'émission induite ($A_i > 0$).

Exprimer la variation de l'intensité I en fonction de z . On désignera par I_0 sa valeur en $z = 0$.

Préciser le sens physique de ce résultat qui traduit l'effet MASER.

L'émission spontanée, dans le domaine de fréquence étudié est négligeable.

- 21. On désigne par Q le facteur de qualité de la cavité qui tient compte de la puissance volumique P dissipée

$$Q = 2\pi\nu_0 \frac{B_1^2 / 2\mu_0}{\pi}$$

par tous les effets autres que l'effet de résonance magnétique. Il est défini par :

En utilisant les questions 20-a et 11-a, montrer que la condition d'auto - amplification, dans la cavité, dite

condition MASER s'écrit : $N_s - N_i > \frac{h \Delta\nu}{8\mu_0 Q \mu^2}$.

- 22. Il y a une multitude d'autres types de MASER fondés sur des effets physiques différents mais la description mathématique de ces systèmes est toujours semblable à celle du système paramagnétique à deux niveaux d'énergie. Au milieu des années 1950, les premières horloges atomiques (étalons de temps atomiques) de laboratoire sont apparues basées sur le principe du fonctionnement MASER.

Citer les phénomènes physiques qui interviennent dans la définition de la seconde respectivement dans les étalons de temps astronomiques et dans les étalons de temps atomiques.