

Correction EMD 1: Mécanique des milieux continus**Exercice 1 (4Pts)**

1- i, j sont des indices muets et k, h sont des indices libres, donc l'expression est un tenseur d'ordre 2.

$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ihj} = a_{kh}$...0.5 ce tenseur a 9 composantes

$$a_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij1}\varepsilon_{i1j} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{231}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{312}) = -1 \quad \dots 0.25$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij2}\varepsilon_{i2j} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{132}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{213}) = -1 \quad \dots 0.25$$

$$a_{33} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij3}\varepsilon_{i3j} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{123}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{231}) = -1 \quad \dots 0.25$$

$$a_{12} = a_{21} = 0, a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = a_{32} = 0 \quad \dots 0.25$$

$$\text{Donc: } a_{kh} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ihj} = -\delta_{kh} \quad \dots 0.5$$

$$2- C_{11} = D_2^2 + D_3^2 = -D_1^2 + D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = -\delta_{11}D_1D_1 + D_kD_k \quad \dots 0.5$$

$$C_{22} = D_1^2 + D_3^2 = -D_2^2 + D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = -\delta_{22}D_2D_2 + D_kD_k$$

$$C_{12} = C_{21} = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = -\delta_{12}D_1D_1 + D_kD_k \quad \dots 0.5 \text{ donc :}$$

$$C_{ij} = -\delta_{ij}D_iD_j + D_kD_k \quad \dots 1$$

Exercice 2 (8 Pts)

1- Calcul des contraintes principales en fonction de α (3 Pts):

$$|\sigma - \lambda I| = |4 - \lambda \quad 2\alpha \quad 0 \quad 2\alpha \quad 4 - \lambda \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12\alpha - \lambda| = -(12\alpha + \lambda)(4 - 2\alpha - \lambda)(4 + 2\alpha - \lambda)$$

Donc les solutions de ce polynôme caractéristique (les valeurs principales):

$$\sigma_1 = 4 + 2\alpha, \sigma_2 = 4 - 2\alpha, \sigma_3 = -12\alpha \quad \dots 1,5$$

Détermination des axes principaux...1:

$$\sigma_1 = 4 + 2\alpha [2\alpha \quad 2\alpha \quad 0 \quad 2\alpha \quad 2\alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12\alpha] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0] \Rightarrow x_1 = -x_2 \text{ et } x_3 = 0$$

$$\text{donc } \vec{v}_1 = x_1 [1 \quad -1 \quad 0]$$

On déduit $\vec{e}'_1 = [1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0]$ De la même façon on obtient

$$\vec{v}_2 = x_1 [1 \quad 1 \quad 0] \text{ et } \vec{e}'_2 = [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0]; \vec{v}_3 = x_3 [0 \quad 0 \quad 1] \text{ et } \vec{e}'_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

2- Les scalaires invariants (1.5 Pts):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 8 - 12\alpha \quad \dots 0.5, I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 16 - 96\alpha - 4\alpha^2$$

...0.5

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 12\alpha(4\alpha^2 - 16) \quad \dots 0.5$$

3- La matrice de passage Q entre $\{\vec{e}_i\}$ et $\{\vec{e}'_i\}$ (1.5 Pts)

$$\text{On a } \vec{e}_1(1, 0, 0), \vec{e}_2(1, 0, 0), \vec{e}_3(1, 0, 0)$$

Et $\vec{e}'_1(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \vec{e}'_2(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \vec{e}'_3(1, 0, 0)$

Avec $Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j \dots 0.5$ donc on obtient

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots 1$$

4- Calcul du vecteur contrainte (2 Pts): pour $\alpha=1$ on a

$$\vec{\sigma} = [4 \ 2 \ 0 \ 2 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ -12] \dots 0.5$$

$$\vec{T}_1 = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{T}_1(2 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, 0) \dots 0.75$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{T}_2 = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 = 6\sqrt{3} \vec{e}_3 \dots 0.75$$

Exercice 3 (8 Pts)

1- Les scalaires invariants la partie sphérique et le déviateur (2.5 Pts)

$$I_1 = 4 \dots 0.5, I_2 = 5 - 4r^2 \dots 0.5, I_3 = 2(1 - 4r^2) \dots 0.5$$

$$\vec{\sigma}^S = [4/3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4/3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4/3] \dots 0.5, \vec{\sigma} = [2/3 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/3 \ 2r \ 0 \ 2r \ -1/3] \dots 0.5$$

2- Calcul du vecteur contrainte au point M(r=1,0,0) (2 Pts):

La sphère a une équation $r=1$ ($f(r,\theta,\phi)=r-1$) $\dots 0.5$ en coordonnées sphériques donc la normale:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \vec{e}_r [1 \ 0 \ 0] \dots 0.5$$

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = [2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1][1 \ 0 \ 0] = 2\vec{e}_r \dots 1$$

3- Calcul du tenseur de contraintes transformé au point M. (2 Pts)

Le tenseur de rotation des vecteurs de base est:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \dots 0.5$$

Donc on a $\sigma' = R^T \sigma R \dots 0.5$

$$\vec{\sigma}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

on obtient:

$$\vec{\sigma}' = [2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \dots 1$$

4- Les contraintes principales (1.5 Pts)

Nous remarquons que dans le nouveau repère la matrice du tenseur est diagonale dont les éléments représentent les contraintes principales, finalement on a:

$$\sigma_1 = 3 \dots 0.5, \sigma_2 = 2 \dots 0.5, \sigma_3 = -1 \dots 0.5$$