

Тема: «Навигатор в пространстве больших чисел»

Автор работы: Колпакова Екатерина

МОУ СОШ № 4 село Падинское, 7 класс

Научный руководитель:

Колпакова Надежда Алексеевна,

учитель математики МОУ СОШ № 4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Способ разложения на простые множители
2. Извлечение квадратного корня уголком
3. Способ использования таблицы квадратов двузначных чисел
4. Формула Древнего Вавилона
5. Способ отбрасывания полного квадрата
6. Канадский метод
7. Метод подбора угадыванием
8. Метод вычетов нечётного числа
9. Формула Пика
10. Применение формулы Пика при выполнении заданий ЕГЭ по математике
11. Признаки делимости «с использованием отбрасывания цифр»

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСОВ

ПРИЛОЖЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность:

В ходе подготовки к государственной итоговой аттестации по математике в следующем учебном году меня заинтересовал вопрос, как можно извлечь квадратный корень из больших чисел без калькулятора, как найти площадь геометрической фигуры и существуют ли признаки деления, которые помогут решить целый ряд задач, но я их не знаю.

Я заинтересовалась и решила изучить этот вопрос глубже, чем он изложен в школьной программе, а также приготовить мини-книжечку с наиболее простыми способами извлечения квадратных корней из больших чисел без калькулятора.

Объект исследования: математические символы – квадратные корни, задачи на клетчатой бумаге, признаки делимости «с использованием отбрасывания цифр».

Предмет исследования: особенности способов извлечения квадратных корней без калькулятора, задачи на вычисление площади многоугольника на клетчатой бумаге, признаки делимости «с использованием отбрасывания цифр».

Задачи

1. Изучить литературу по данным вопросам.
2. Рассмотреть особенности каждого найденного способа извлечения квадратных корней и его алгоритм.
3. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных способов и алгоритмов извлечения квадратного корня.
4. Создать мини-книжечку по самым интересным алгоритмам.
5. Рассмотреть различные способы вычислений площадей многоугольников;
6. Показать практическое применение этих способов;

7. Выяснить преимущества и недостатки каждого способа;
8. Систематизировать и углубить накопленные мной знания;
9. Создать электронную презентацию работы для представления собранного материала одноклассникам;

Методы исследования:

Сравнение, моделирование, обобщение, аналогии, изучение литературы и Интернет-ресурсов, анализ и классификация информации.

Все знают, что извлечь квадратный корень без калькулятора - это очень сложная задача. Когда нет под рукой калькулятора, то начинаем методом подбора стараться вспомнить данные из таблицы квадратов целых чисел, но это не всегда помогает. Например, таблица квадратов целых чисел не даёт ответ на такие вопросы, как, например, извлечь корень из 75, 37, 885, 108, 18061 и другие даже приблизительно.

Также на экзаменах пользование калькулятором запрещено и на математике профильный уровень нет таблицы квадратов целых чисел, а надо извлечь корень.

Но изучая литературу по данной теме, я узнала, что извлекать корни из таких чисел люди научились задолго до изобретения микрокалькулятора. Исследуя эту тему, я нашла несколько способов решения данной проблемы.

1. Способ разложения на простые множители

Для извлечения квадратного корня можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения.

Таким способом принято пользоваться при решении заданий с корнями в школе.

$$3136 \mid 2$$

$$1568 \mid 2$$

$$784 \mid 2$$

$$392 \mid 2$$

$$196 \mid 2$$

$$98 \mid 2$$

$$49 \mid 7$$

$$7 \mid 7$$

$$7056 \mid 2$$

$$3528 \mid 2$$

$$1764 \mid 2$$

$$882 \mid 2$$

$$441 \mid 3$$

$$147 \mid 3$$

$$49 \mid 7$$

$$7 \mid 7$$

$$\sqrt{3136} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56 \quad \sqrt{7056} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Многие применяют его успешно и считают единственным. Извлечение корня разложением на множители - трудоёмкая задача, которая тоже не всегда

приводит к желаемому результату. Попробуйте извлечь квадратный корень из числа 209764? Разложение на простые множители дает произведение $2 \cdot 2 \cdot 52441$. А как быть дальше? С этой задачей сталкиваются все, и спокойно в ответе записывают остаток от разложения под знак корня. Методом проб и ошибок, подбором разложение, конечно, можно сделать, если быть уверенным в том, что получится красивый ответ, но практика показывает, что очень редко предлагаются задания с полным разложением. Чаще мы видим, что корень до конца не извлечь.

Поэтому, этот способ лишь частично решает проблему извлечения без калькулятора.

2. Извлечение квадратного корня уголком

Для извлечения квадратного корня уголком и $\sqrt{8649}$ рассмотрим алгоритм:

1-й шаг. Число 8649 разбиваем на грани справа налево; каждая из которых, должна содержать две цифры. Получаем две грани: $\sqrt{86'49}$.

2-й шаг. Извлекаем квадратный корень из первой грани 86, получаем $\sqrt{86} \approx 9$ с недостатком. Цифра 9 – это первая цифра корня.

3-й шаг. Число 9 возводим в квадрат ($9^2 = 81$) и число 81 вычитаем из первой грани, получаем $86 - 81 = 5$. Число 5 – первый остаток.

4-й шаг. К остатку 5 приписываем вторую грань 49, получаем число 549.

5-й шаг. Удваиваем первую цифру корня 9 и, записывая слева, получаем-18

К числу нужно приписать такую наибольшую цифру, чтобы произведение числа, которое мы получим, на эту цифру было бы либо равно числу 549, либо меньше, чем 549. Это цифра 3. Она находится путем подбора: количество десятков числа 549, то есть число 54 делится на 18, получаем 3, так как $183 \cdot 3 = 549$. Цифра 3 – это вторая цифра корня.

6-й шаг. Находим остаток $549 - 549 = 0$. Так как остаток равен нулю, то мы получили точное значение корня – 93.

Приведу еще пример: извлечь $\sqrt{212521}$

№	Шаги алгоритма	Пример	Комментарии
1	Разбить число на группы по 2 цифры в каждой справа налево	21' 25' 21	Общее число образовавшихся групп определяет количество цифр в ответе
2	Для первой группы цифр подобрать цифру, квадрат которой будет наибольшим, но не превосходящим числа первой группы	1 группа – 21 $4^2=16$ $16<21$ цифра - 4	Найденная цифра записывается в ответе на первом месте
3	Из первой группы цифр вычесть найденный на шаге 2 квадрат первой цифры ответа	<u>21' 25' 21</u> <u>16</u> 5	
4	К остатку, найденному на шаге 3, приписать справа (снести) вторую группу цифр	<u>21' 25' 21</u> <u>16</u> 525	
5	К удвоенной первой цифре ответа приписать справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру было наибольшим, но не превосходило числа, найденного на шаге 4	$4*2=8$ цифра – 6 $86*6=516$ $516<525$	Найденная цифра записывается в ответе на втором месте
6	Из числа, полученного на шаге 4 вычесть число, полученное на шаге 5. Снести к остатку	<u>21' 25' 21</u> <u>16</u> <u>525</u>	

	третью группу	$\frac{516}{921}$	
7	К удвоенному числу, состоящему из первых двух цифр ответа, приписать справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру был наибольшим, но не превосходило числа, полученного на шаге 6	$46 \cdot 2 = 92$ цифра 1 $921 \cdot 1 = 921$	Найденная цифра записывается в ответе на третьем месте
8	Записать ответ	$\sqrt{212521} = 461$	

3. Способ использования таблицы квадратов двузначных чисел

Про этот способ я узнал из Интернета. Способ очень простой и даёт мгновенное извлечение квадратного корня из любых целых чисел от 1 до 100 с точностью до десятых без калькулятора. Одно условие для этого метода – наличие таблицы квадратов чисел до 99.

Откройте таблицу и проверьте скорость нахождения ответа. Но сначала несколько рекомендаций: самый левый столбик – это будут в ответе целые, самая верхняя строчка – это десятые в ответе. А дальше всё просто: закройте две последние цифры числа в таблице и найдите нужное вам, не превосходящее подкоренное число, и далее действуйте по правилам этой таблицы.

Рассмотрим на примере. Найдём значение $\sqrt{87}$.

Закрываем две последние цифры у всех чисел в таблице и находим близкие для 87 – таких только два 8649 и 8837. Но 88 – это уже много.

Значит, остаётся только одно – 8649.

Левый столбик даёт ответ 9 (это целых), а верхняя строчка 3 (это десятых). Значит $\sqrt{87} \approx 9,3$. Проверим на МК $\sqrt{87} \approx 9,327379$.

Быстро, просто, доступно на экзамене. Но сразу понятно, что корни, большие 100 уже этим способом извлечь невозможно. Способ удобен для заданий с маленькими корнями и при наличии таблицы.

4. Формула Древнего Вавилона

Древние вавилоняне пользовались следующим способом нахождения приближенного значения квадратного корня их числа x . Число x они представляли в виде суммы a^2+b , где a^2 ближайший к числу x точный квадрат

натурального числа a ($a^2 < x$), и пользовались формулой $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. (1)

Извлечем с помощью формулы (1) корень квадратный, например, из числа 28:

$$\sqrt{28} = \sqrt{5^2 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5,3.$$

Результат извлечения корня из 28 с помощью МК 5,2915026.

Как видим способ вавилонян, дает хорошее приближение к точному значению корня.

5. Способ отбрасывания полного квадрата (только у четырехзначных чисел)

Сразу стоит уточнить, что этот способ применим только для извлечения квадратного корня из точного квадрата, а алгоритм нахождения зависит от величины подкоренного числа.

1) Извлечение корней до числа $75^2 = 5625$

Например: $\sqrt{3844} = \sqrt{3700 + 144} = 37 + 25 = 62$.

Число 3844 представим в виде суммы, выделив из этого числа квадрат 144, затем выделенный квадрат отбрасываем, к **числу сотен первого слагаемого (37) прибавляем всегда 25**. Получим ответ 62.

Так можно извлекать только квадратные корни до числа $75^2 = 5625$!

2) Извлечение корней после числа $75^2 = 5625$

Как же устно извлечь квадратные корни из чисел больше $75^2 = 5625$?

Например: $\sqrt{7225} = \sqrt{7000 + 225} = 70 + \sqrt{225} = 70 + 15 = 85$.

Поясним, 7225 представим в виде суммы 7000 и выделенного квадрата 225.

Затем **к числу сотен прибавить квадратный корень** из 225, равный 15.

Получим ответ 85.

Этот способ нахождения очень интересен и в какой – то мере оригинален, но в ходе моего исследования встретился только один раз в работе пермского преподавателя.

Возможно, он мало изучен или имеет какие – то исключения.

Он достаточно сложен в запоминании из – за двойственности алгоритма и применим только для четырёхзначных чисел точных корней, но я проработал множество примеров и убедился в его правильности. Кроме всего этот способ доступен тем, кто уже запомнил наизусть квадраты чисел от 11 до 29, ведь без их знания он будет бесполезен.

6. Канадский метод

Этот быстрый метод был открыт молодыми учёными одного из ведущих университетов Канады в 20 веке. Его точность – не более двух – трёх знаков после запятой. Вот их формула:

$\sqrt{X} = \sqrt{S} + (X - S) / (2 \sqrt{S})$, где X - число, из которого необходимо извлечь квадратный корень, а S - число ближайшего точного квадрата.

Давайте попробуем извлечь квадратный корень из 75

$X = 75$, $S = 81$. Это означает, что $\sqrt{S} = 9$.

Просчитаем по этой формуле $\sqrt{75}$: $\sqrt{75} = 9 + (75 - 81) / (2 \cdot 9)$

$\sqrt{75} = 9 + (-6/18) = 9 - 0,333 = 8,667$

При детальном изучении этого метода легко можно доказать его сходство с вавилонским и поспорить за авторские права изобретения этой формулы, если такие есть в действительности. Метод несложный и удобный.

7. Метод подбора угадыванием

Этот метод предлагают английские студенты математического колледжа Лондона, но каждый в своей жизни хоть раз произвольно пользовался этим методом.[3] Он основан на подборе разных значений квадратов близких чисел путём сужения области поиска. Овладеть этим способом может каждый, но вот пользоваться вряд ли, потому что он требует многократного вычисления произведения столбиком не всегда правильно угаданных чисел. Этот способ проигрывает и в красоте решения, и по времени. Алгоритм прост:

Предположим, вы хотите извлечь квадратный корень из 75.

Так как $8^2 = 64$ и $9^2 = 81$, вы знаете, ответ находится где-то между ними.

Попробуйте возвести $8,5^2$ и вы получите 72,25 (слишком мало)

Теперь попробуйте $8,6^2$ и вы получите 73,96 (слишком небольшой, но все ближе)

Теперь попробуйте $8,7^2$ и вы получите 75,69 (слишком большая)

Теперь вы знаете, ответ находится между 8,6 и 8,7

Попробуйте возвести $8,65^2$ и вы получите 74,8225 (слишком мало)

Теперь попробуйте $8,66^2$... и так далее.

Продолжайте, пока не получите ответ достаточно точный для вас.

8. Метод вычетов нечётного числа

Многие знают метод извлечения квадратного корня разложением числа на простые множители. В своей работе представлю ещё один способ, с помощью которого можно узнать целую часть квадратного корня числа. Способ очень простой. Заметим, что для квадратов чисел верны следующие равенства:

$$1=1^2$$

$$1+3=2^2$$

$$1+3+5=3^2$$

$$1+3+5+7=4^2 \text{ и т.д.}$$

Правило: узнать целую часть квадратного корня числа можно вычитая, из

него все нечётные числа по порядку, пока остаток не станет меньше следующего вычитаемого числа или равен нулю, и сочтя количество выполненных действий.

Например, чтобы получить квадратный корень из 36 и 121 это:

$$36 - \underline{1} = 35 - \underline{3} = 32 - \underline{5} = 27 - \underline{7} = 20 - \underline{9} = 11 - \underline{11} = 0$$

Общее количество вычитаний = 6, поэтому квадратный корень из 36 = 6.

$$121 - \underline{1} = 120 - \underline{3} = 117 - \underline{5} = 112 - \underline{7} = 105 - \underline{9} = 96 - \underline{11} = 85 - \underline{13} = 72 - \underline{15} = 57 - \underline{17} = 40 - \underline{19} = 21 - \underline{21} = 0$$

Общее количество вычитаний = 11, поэтому $\sqrt{121} = 11$.

Еще пример: найдём $\sqrt{529}$

Решение: 1) 529

$$\underline{\quad 1 \quad}$$

$$2) \underline{\quad} 528$$

$$\underline{\quad 3 \quad}$$

$$3) \underline{\quad} 525$$

$$\underline{\quad 5 \quad}$$

$$4) \underline{\quad} 520$$

$$\underline{\quad 7 \quad}$$

$$5) \underline{\quad} 513$$

$$\underline{\quad 9 \quad}$$

$$6) \underline{\quad} 504$$

$$\underline{\quad 11 \quad}$$

$$7) \underline{\quad} 493$$

$$\underline{\quad 13 \quad}$$

$$8) \underline{\quad} 480$$

$$\underline{\quad 15 \quad}$$

$$9) \underline{\quad} 465$$

$$\underline{\quad 17 \quad}$$

- 10)_448
 19
- 11)_429
 21
- 12)_408
 27
- 13)_385
 25
- 14)_360
 27
- 15)_333
 29
- 16)_304
 31
- 17)_273
 33
- 18)_240
 35
- 19)_205
 37
- 20)_168
 39
- 21)_129
 41
- 22)_88
 43
- 23)_45
 45
- 0

Ответ: $\sqrt{529} = 23$

Ученые называют этот метод арифметическим извлечением квадратного корня, а за глаза «методом черепахи» из-за его медлительности.

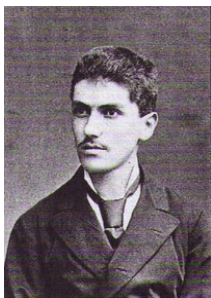
Недостатком такого способа является то, что если извлекаемый корень не является целым числом, то можно узнать только его целую часть, но не точнее. В то же время такой способ вполне доступен детям, решающим простейшие математические задачи, требующие извлечения квадратного корня.

Попробуйте извлечь квадратный корень из числа, например, 5963364 этим способом и вы поймёте, что он «работает», безусловно, без погрешностей для точных корней, но очень - очень длинный в решёнии.

9. Формула Пика

Формула Пика не рассматривается в школьных учебниках, но представляет особый интерес для вычисления площади любого многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



Георг Александр Пик – австрийский математик, родился 10 августа 1859 года в Вене.

В 1876 году он опубликовал свою первую работу по математике, ему было всего лишь семнадцать лет. Он изучал математику и физику, университет окончил в 1879 году.

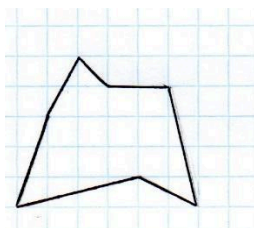
В 1900-1901 годах Георг Пик был деканом философского факультета Карлова университета и в 1911 году Пик оказался во главе комиссии, которая приняла на кафедру физика Альберта Эйнштейна.

После того как Пик вышел в отставку в 1927 году, он получил звание почётного профессора и вернулся в Вену — город, в котором он родился.

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ

Существует несколько способов вычисления площади многоугольника на клетчатой бумаге:

- Подсчет количества клеток
- Применение формул планиметрии
- Разбиение фигуры на более простые фигуры
- Достроить фигуру до прямоугольника
- Формула Пика



Найдём площадь многоугольника (рис. 1).

Искать её можно по-разному.

Это задание нам дал наш учитель на уроке. Хотя многоугольник выглядел достаточно просто, для вычисления его площади нам пришлось изрядно потрудиться. Мы потратили 15 минут времени на решение этой задачи. Хочу отметить, что не все учащиеся нашего класса справились с данным заданием. А когда нам сказали, что есть формула позволяющая вычислить площадь за одну минуту, то меня очень заинтересовало и я решила заняться изучением этого вопроса.

Сначала я решила узнать какими способами вычисляли площадь мои одноклассники, кто справился с заданием и заняться изучением формулы. В нашем классе не кто не знал формулы Пика. Также это задание мы решили дать учащимся 9 и 11 классов. Вот что у нас получилось.

Класс	Правильно	Неправильно
9	6	11
10	6	4
11	3	1
всего	15	16

10. Применение формулы Пика при выполнении заданий ЕГЭ по математике

Все пособия по подготовке к ЕГЭ, диагностические работы, которые проводит Центр тестирования, а также демонстрационный вариант, содержат задания на вычисление площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге. Большинство таких заданий можно быстро выполнить, применив лишь формулы для вычисления площадей треугольника, прямоугольника, квадрата и трапеции.

Но в некоторых вариантах применение формул площадей фигур приводит к более объемному решению, чем использование формулы Пика. $S = B + \Gamma : 2 - 1$, где B – количество улов внутри фигуры, Γ – количество узлов на границе фигуры.

11. Признаки делимости «с использованием отбрасывания цифр»

1. ЧИСЛО ДЕЛИТСЯ НА 7, ЕСЛИ РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИТАНИЯ УДВОЕННОЙ ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ ИЗ ЭТОГО ЧИСЛА БЕЗ ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ ДЕЛИТСЯ НА 7
2. ЧИСЛО ДЕЛИТСЯ НА 13, ЕСЛИ ЧИСЛО ЕГО ДЕСЯТКОВ, СЛОЖЕННОЕ С УЧЕТВЕРЕННЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ, КРАТНО 13
3. ЧИСЛО ДЕЛИТСЯ НА 17, ЕСЛИ РАЗНОСТЬ МЕЖДУ ЧИСЛОМ ЕГО ДЕСЯТКОВ И УПЯТЕРЕННЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ КРАТНО 17
4. ЧИСЛО ДЕЛИТСЯ НА 19, ЕСЛИ ЧИСЛО ЕГО ДЕСЯТКОВ, СЛОЖЕННОЕ С УДВОЕННЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ, КРАТНО 19
5. ЧИСЛО ДЕЛИТСЯ НА 23, ЕСЛИ ЧИСЛО ЕГО ДЕСЯТКОВ, СЛОЖЕННОЕ С УСЕМЕРЕННЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ, КРАТНО 23

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные в работе методы извлечения корней встречаются во многих источниках. Тем не менее, разобраться в них оказалось для меня непростой задачей, что вызвало немалый интерес. Представленные алгоритмы позволят всем, кто заинтересуется данной темой, быстрее овладеть навыками вычисления квадратного корня, их можно использовать при проверке своего решения и не зависеть от калькулятора.

В результате проведённого исследования я пришел к выводу: различные способы извлечения квадратного корня без калькулятора необходимы в школьном курсе математики, чтобы развивать навыки вычислений.

Теоретическая значимость исследования – систематизированы основные методы извлечения квадратных корней.

Практическая значимость: в создании мини-книжечки, содержащей опорную схему извлечения квадратных корней различными способами (Приложение1).

Умение пользоваться формулой Пика позволяет вычислять площади выпуклых многоугольников, а так же площади невыпуклых многоугольников. А значит, ее можно применять для вычисления площадей многоугольников на ЕГЭ.

- ✓ Для вычисления площади многоугольника, нужно знать всего одну формулу: $S = B + \Gamma/2$ - 1- формулу Пика.
- ✓ Формула Пика проста для запоминания.
- ✓ Формула Пика удобна и проста в применении.
- ✓ Многоугольник, площадь которого необходимо вычислить, может быть любой формы.

Формула Пика облегчает и ускоряет нахождение площади многоугольников.

Я познакомила своих одноклассников с формулой Пика и провела небольшую самостоятельную работу. Ребятам предлагалось вычислить площадь многоугольника, применяя названную формулу. По итогам этой работы можно сделать вывод, что на вычисление площади невыпуклого

многоугольника с помощью формулы Пика было затрачено меньше времени, и не было допущено ошибок. Моей работой заинтересовались учащиеся 11 класса. Эта работа способствовала более глубокому пониманию школьной программы и расширению кругозора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСОВ

1. Жарковская Н. М., Рисс Е. А. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика // Математика, 2009, № 17, с. 24-25.
2. Задачи открытого банка заданий по математике ФИПИ
3. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия на клетчатой бумаге. – М.: Чистые пруды, 2009.
4. И.Н. Сергеев, С.Н. Олехник, С.Б.Гашков «Примени математику». – М.: Наука, 1990
5. Керимов З., «Как найти целый корень?» Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" №2, 1980
6. Петраков И.С. «математические кружки в 8-10 классах»; Книга для учителя. –М.:Просвещение,1987
7. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. «Рассказы о прикладной математики».- М.: Наука. Главная редакция физико- математической литературы, 1979
8. Ткачева М.В. Домашняя математика. Книга для учащихся 8 класса учебных заведений. – Москва, Просвещение, 1994г.
9. Жохов В.И., Погодин В.Н. Справочные таблицы по математике.-М.: ООО «Издательство «РОСМЭН-ПРЕСС», 2004.-120 с.
10. <http://translate.google.ru/translate>
11. <http://www.murderousmaths.co.uk/books/sqroot.htm>
12. <http://ru.wikipedia.org/wiki/teorema/>
 - <http://interneturok.ru>
 - <http://live.mephist.ru>
 - <http://mathege.ru>
 - ilib.mccme.ru
 - le-savchen.ucoz.ru
 - reshuege.ru