Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
Curso: 2022-2023
Asignatura: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1.- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$\{x - y - z = 0\ 2x + (2a - 1)y + (\sqrt{2} - 2)z = 2\ -ax + ay + 2a^2 z = \sqrt{2}$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Resolución

Matrices de coeficientes y ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix}$,

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\det det\ A = 4a^3 - 2a^2 + (\sqrt{2}-2)a - 2a - 2a^2 + a - (\sqrt{2}-2)a + 4a^2 = 4a^3 - a =$

$= a(4a^2 - 1) = a(2a+1)(2a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = \frac{-1}{2} \text{ ó } a = \frac{1}{2}$

– Si $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq \frac{-1}{2}$, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Resolvámoslo por Gauss:

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\ f2 - 2f1\ f3 + af1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\{x - y - z = 0\ (2a+1)y + \sqrt{2}z = 2\ (2a^2 - a)z = \sqrt{2}$; despejando, $z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2 - a}$. Sustituyendo,

$$(2a+1)y + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2a^2 - a} = 2 \Rightarrow y = \frac{2 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2a^2 - a}}{2a+1} = \frac{4a^2 - 2a - 2}{(2a^2 - a)(2a+1)} = \frac{2(a-1)(2a+1)}{2(2a-1)(2a+1)} \Rightarrow y = \frac{a-1}{2a-1}$$

Luego, $x = y + z = \frac{a-1}{2a-1} + \frac{\sqrt{2}}{a(2a-1)} = \frac{a^2 - a + \sqrt{2}}{a(2a-1)}$

– Si a = 0, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = \sqrt{2}$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

– Si $a = \frac{1}{2}$,

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \end{pmatrix}\ f2 - 2f1\ f3 + \frac{1}{2}f1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

. La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = \sqrt{2}$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

– Si $a = \frac{-1}{2}$,

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \end{pmatrix}\ 2f3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$f3 = \sqrt{2}\, f2\ (1\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0\ \sqrt{2}\ 2)$, que corresponde al sistema $\{x - y - z = 0\ \sqrt{2}\, z = 3\ ;\ z = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x = y + z = y + \frac{3}{\sqrt{2}}$. Llamando y = k, las infinitas soluciones del sistema son

$\{x = k + \frac{3}{\sqrt{2}}\ y = k\ z = \frac{3}{\sqrt{2}}$, con k ∈ R.

P2.- Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz AB es máximo, siendo

$A = (0\ 0\ -1\ 0\ 1\ t\ -1\ 1\ t\ 1)$ y $B = (t+1\ 1\ t\ 0\ t\ -2t+1\ t+1\ t+1\ -t-1)$ (2,5 puntos)

Resolución

Como A y B son cuadradas de orden 3, entonces AB también lo es. Luego, rg(AB) como máximo es 3

rg(AB) = 3 ⇔ 0 ≠ det(AB)
det(AB) = det(A) det(B) = 1 .
$det(t+1\ 1\ t\ 0\ t\ -2t+1\ t+1\ t+1\ -t-1)\ \ f3 - f1 = det(t+1\ 1\ t\ 0\ t\ -2t+1\ 0\ t\ -2t-1$

$f3 - f2 = det(t+1\ 1\ t\ 0\ t\ -2t+1\ 0\ 0\ -2) = -2t(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ó $t = -1$

Luego, el rango de AB es máximo (o sea 3) cuando t ≠ 0 y t ≠ –1

P3.- Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$r: \{x - y - z + 2 = 0\ x - 3y + 3z - 8 = 0$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$ (2,5 puntos)

Resolución

Como la recta r está dada como intersección de dos planos, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$\vec{d}_r = (1,\ -1,\ -1)\ x\ (1,\ -3,\ 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (-6,\ -4,\ -2)\ //\ (3,\ 2,\ 1)$

.

Hallemos un punto de r: Para z = 0, $\{x - y + 2 = 0\ x - 3y - 8 = 0$; resolviendo, y = –5, x = –7.
Luego, A(–7, –5, 0) ∈ r.
B(2, –5, 0) ∈ s y un vector director de s es $\vec{d}_s = (3,\ -4,\ -2)\ //\ (-3,\ 4,\ 2)$;
$s: \{x = 2 - 3k\ y = -5 + 4k\ z = 2k$
Como $det\left(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}\right) = |3\ 2\ 1\ -3\ 4\ 2\ 9\ 0\ 0| = 0$, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{AB}$ son linealmente dependientes.

Luego, r y s son secantes, pues $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ son no paralelos. Hallemos el punto de corte resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas:
Sustituyendo en la ecuación de r,
$\{2 - 3k + 5 - 4k - 2k + 2 = 0 \rightarrow k = 1\ 2 - 3k - 3(-5 + 4k) + 3(2k) - 8 = 0 \rightarrow k = 1$;
$\{x = 2 - 3.1\ y = -5 + 4.1\ z = 2.1$
Por tanto, r y s se cortan en el punto P(–1, –1, 2)

La recta t que se pide pasa por P(–1, –1, 2) y tiene vector director

---

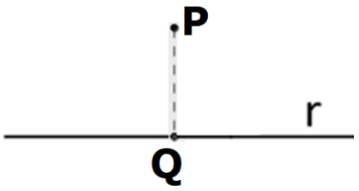
$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (0, -9, 18) \,//\, (0, -1, 2)$. Luego,
$t: \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$

P4.- Sean P(1, 5, –1) y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$

a) Calcula el punto Q ∈ r tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

Resolución

P(1, 5, –1) ∉ r porque no cumple su ecuación: $\frac{1-1}{2} \neq \frac{5-2}{1} \neq \frac{-1+4}{2}$



El punto Q de r que buscamos es de la forma Q(1 + 2k, 2 + k, –4 + 2k). Como $\vec{d}_r \perp \vec{PQ} \Rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{PQ} = 0$.

(2, 1, 2) . (2k, –3+ k, –3 + 2k) = 0 ⇒ 4k – 3 + k – 6 + 4k = 0 ⇒ 9k – 9 = 0 ⇒ k = 1

Sustituyendo, el punto buscado es Q(1 + 2.1, 2 + 1, –4 + 2.1) ⇒ Q(3, 3, –2)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

Resolución

Los puntos de r que se piden son de la forma $Q_a(1 + 2a, 2 + a, -4 + 2a)$

$3\sqrt{2} = d(P, Q_a) = |(2a, -3 + a, -3 + 2a)| = \sqrt{(2a)^2 + (a-3)^2 + (2a-3)^2}$

Elevando al cuadrado, operando y simplificando, $18 = 9a^2 - 18a + 18 \Rightarrow 9a(a-2) = 0$; a = 0 ó a = 2

Para a = 0, obtenemos $Q_1(1 + 2.0, 2 + 0, -4 + 2.0) \Rightarrow Q_1(1, 2, -4)$

Para a = 2, obtenemos $Q_2(1 + 2.2, 2 + 2, -4 + 2.2) \Rightarrow Q_2(5, 4, 0)$

P5.- Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx$. (1,25 puntos)

Resolución

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$; $x = 1, x = -2 \Rightarrow \frac{2x-5}{x^2-x-2} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

Multiplicando los dos miembros por (x – 1)(x + 2), tenemos 2x – 5 = A(x + 2) + B(x – 1)

para x = 1, sustituyendo –3 = 3A ⇒ A = –1 ; para x = –2, sustituyendo –9 = –3B ⇒ B = 3

$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}\right) dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + k$

b) $\int x \ln \ln x \, dx$ (1,25 puntos)

Resolución

Usamos el método de integración por partes:

$\left[u = \ln ln\, x \; \frac{dx}{x} \;\; dv = x\, dx \; v = \frac{x^2}{2}\right] \Rightarrow$

$$\int x \ln ln\, x\, dx = \frac{x^2 \ln ln\, x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2 \ln ln\, x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k = \frac{2x^2 \ln ln\, x - x^2}{4} + k$$

P6.- Estudia la continuidad en R de la siguiente función:

$f(x) = \{ \; \frac{(\pi x) - 1}{1 - x}, \; si\, x < 1 \; ln(x\, e^{x+1}) - 2x, \; si\, x \geq 1$

(2,5 puntos)

Resolución

El dominio de f es todo R porque su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.
Para $x \neq 1$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$f(x) = \frac{(\pi.1) - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$\frac{-2\pi cos cos\, (\pi x)\; sen(\pi x)}{-1} = [2\pi \cos cos\, (\pi x)\; sen(\pi x)] = 0\ .$$

Por la regla de L´Hôpital, $f(x) = 0$

Por otra parte, $f(x) = f(1) = ln(1\, e^{1+1}) - 2.1 = 0$

Como $f(x) = f(x) = f(1) = 0$, f es continua en $x = 1$. Conclusión: f es continua en R.

P7.- Se considera la función f(x) = (x + 1) sen(πx).
a) Demuestra que es continua en R. (0,5 puntos)

Resolución f es continua en R por ser el resultado de operar con funciones continuas en R.

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Resolución

Vamos a usar el teorema del valor intermedio de Bolzano, que dice: Si una función g es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $\alpha \in (a, b)$, tal que $g(\alpha) = 0$.

Aplicamos dicho teorema para $g(x) = f(x) - \frac{3}{4} = (x + 1)\, sen(\pi x) - \frac{3}{4}$ en el intervalo $[a, b] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Por ser f continua en R, g también lo es; en particular g es continua en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$g(0) = (0 + 1)\, sen(\pi.0) - \frac{3}{4} = \frac{-3}{4} < 0 \;\; ; \;\; g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) sen\left(\pi.\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

Por el teorema del valor intermedio, existe por lo menos un $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ [fíjate también que $\alpha \in (0, 1)$] tal que $0 = g(\alpha) = f(\alpha) - \frac{3}{4}$. Despejando, $f(\alpha) = \frac{3}{4}$, como queríamos probar.

P8.- Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$f(x) = 2 - 2x^2$ y $g(x) = x^4 - x^2$. (2,5 puntos)

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Resolución

Puntos de corte entre las gráficas:

$\{y = 2 - 2x^2\ y = x^4 - x^2 \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + x^2 - 2 = 0$; $x^2 = \frac{-1 \pm 3}{2}, x^2 = 1, x^2 = -2$

Como x^2 es no negativo, debe ser $x^2 = 1$, de donde $x = 1$ ó $x = -1$

$x = 1; y = 2 - 2.1^2 = 0.$ Punto $(1, 0)$; $x = -1; y = 2 - 2(-1)^2 = 0$. Punto $(-1, 0)$

Como $f(x)$ $2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$, $f(0) = 2$ y $f'(x) = -4x = 0$ si $x = 0$, $y = 2$, la gráfica de f es una parábola cóncava de vértice $(0, 2)$ que corta a los ejes en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

$g(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$; $g(0) = 0$

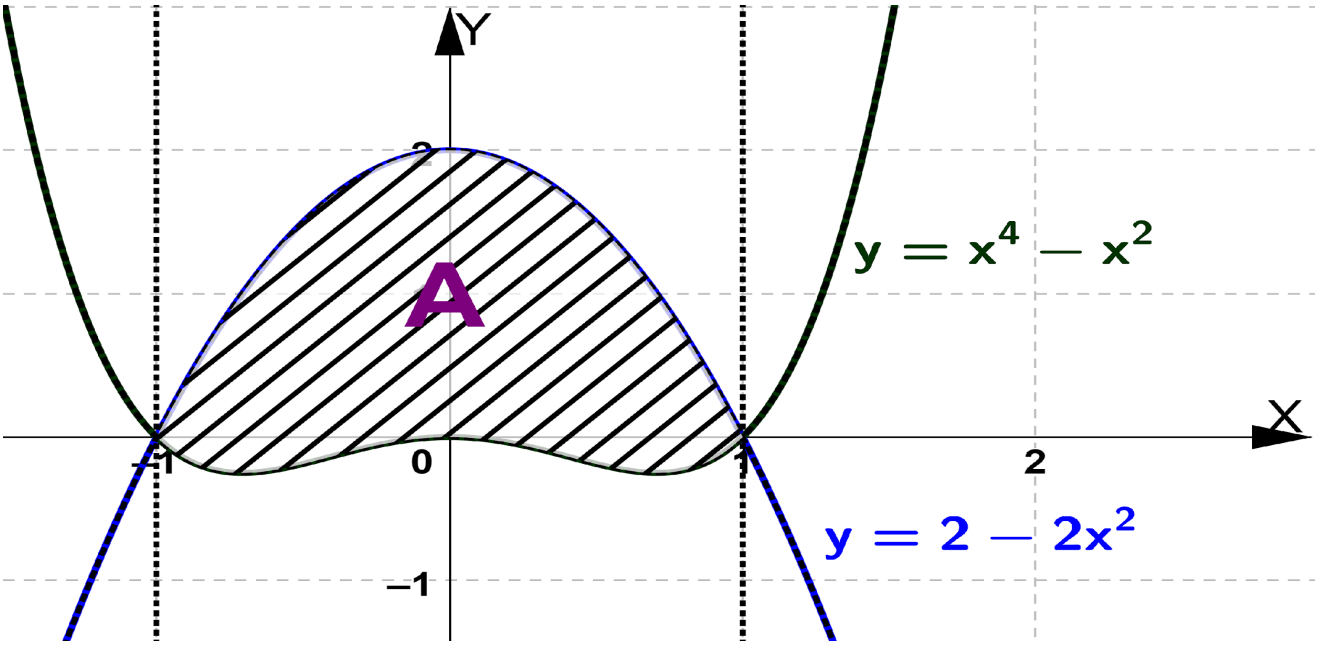
$g'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cong \pm 0,7$; $g''(x) = 12x^2 - 2$

$g''(0) = 12.0^2 - 2 = -2 < 0$ (máximo: $x = 0, y = 0$) ; $g''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 12\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 = 4 > 0$

mínimos: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$;

$x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $y = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$

$g(x) = +\infty$



Por simetría, el área que se pide es $A = 2\int_0^1 [2 - 2x^2 - (x^4 - x^2)]\,dx = \int_0^1 (-2x^4 - 2x^2 + 4)\,dx$.

Una primitiva del integrando es $p(x) = \frac{-2x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + 4x = \frac{60x - 6x^5 - 10x^3}{15}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{60.1 - 6.1^5 - 10.1^3}{15} - \frac{60.0 - 6.0^5 - 10.0^3}{15} = \frac{44}{15} \cong 2,93\ u^2$.