
1.-

a) Clasifique y resuelva el sistema $\{2x + 3y - z = 4\ x + 2y + z = 5$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (2\ 3\ \ -1\ 1\ 2\ 1)$ y $A^* = (2\ 3\ \ -1\ 4\ 1\ 2\ 1\ 5)$

Como $|2\ 3\ 1\ 2| = 1 \neq 0$, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^* = (2\ 3\ \ -1\ 4\ 1\ 2\ 1\ 5)\quad 2f2 - f1\quad (0\ 1\ 3\ 6\ 1\ 2\ 1\ 5)$ que corresponde al sistema $\{y + 3z = 6\ x + 2y + z = 5$. En la 1ª ecuación, $y = 6 - 3z$

En la 2ª ecuación, $x = 5 - 2y - z = 5 - 2(6 - 3z) - z = -7 + 5z$.

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\{x = -7 + 5k\ y = 6 - 3k\ z = k$, con k ∈ R

b) Sean las matrices $A = (1\ \ -1\ 2\ 0)$ y $B = (1\ \ -1\ 1\ 2)$. Calcule $(A^tB - 2I_2)^{-1}$.

Resolución

Sea

$C = A^tB - 2I = (1\ 2\ \ -1\ 0)(1\ \ -1\ 1\ 2) - 2(1\ 0\ 0\ 1) = (3\ 3\ \ -1\ 1) - 2(1\ 0\ 0\ 1) = (1\ 3\ \ -1\ \ -1)$

det C = 2 ≠ 0, existe

$C^{-1} = \left(A^tB - 2I\right)^{-1} = \frac{1}{\det C}\left(adjC^t\right) = \frac{1}{2}adj(1\ \ -1\ 3\ \ -1) = \frac{1}{2}(-1\ \ -3\ 1\ 1) = \left(\frac{-1}{2}\ \frac{-3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$

2.- (prueba ordinaria) Sean las matrices $M = (1\ 2\ 3\ 4)$ y $N = (4\ 3\ 2\ 1)$

a) Calcule la matriz A = MM^t – 5M ; (M^t indica la traspuesta de M).

Resolución $A = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 2\ 4) - 5(1\ 2\ 3\ 4) = (5\ 11\ 11\ 25) - 5(1\ 2\ 3\ 4) = (0\ 1\ \ -4\ 5)$

b) Calcule la matriz B = M^{-1} y resuelva la ecuación N + XM = MB, donde X es una matriz 2 x 2.

Resolución

det M = –2 ≠ 0, existe

$B = M^{-1} = \frac{1}{\det M}\left(adjM^t\right) = \frac{1}{-2}adj(1\ 3\ 2\ 4) = \frac{-1}{2}(4\ \ -2\ \ -3\ 1) = \left(-2\ 1\ \frac{3}{2}\ \frac{-1}{2}\right)$

Trasponiendo término en la ecuación, XM = MB – N = MM^{-1} – N = I – N.

Multiplicando por M^{-1}, por la derecha, $XMM^{-1} = (I - N)M^{-1}$, $X = (I - N)M^{-1}$

$X = [(1\ 0\ 0\ 1) - (4\ 3\ 2\ 1)]\frac{-1}{2}(4\ \ -2\ \ -3\ 1) = \frac{-1}{2}(-3\ \ -3\ \ -2\ 0)(4\ \ -2\ \ -3\ 1) = \frac{-1}{2}(-3\ 3\ \ -8\ 4) = \left(\frac{3}{2}\ \frac{-3}{2}\ 4\ \ -2\right)$

3.- (prueba extraordinaria) Sea la matriz $A = (2\ x\ 0\ x + 2)$

a) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2A$.

Resolución

$A^2 = 2A \Rightarrow (2\ x\ 0\ x + 2)(2\ x\ 0\ x + 2) = 2(2\ x\ 0\ x + 2) \Rightarrow \left(4\ x^2 + 4x\ 0\ x^2 + 4x + 4\right) = (4\ 2x\ 0\ 2x + 4)$

Igualando términos,

$\{x^2 + 4x = 2x\ x^2 + 4x + 4 = 2x + 4 \Rightarrow \{x^2 + 2x = 0\ x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$. Por tanto, x = 0 ó x = –2.

----
b) Para x = – 1, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando AA^{-1}.

Resolución

Para x = –1, $A = (2 \ -1\ 0\ 1)$. Como det A = 2 ≠ 0, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{2}adj(2\ 0\ -1\ 1) = \frac{1}{2}(1\ 1\ 0\ 2) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\right)$$

Comprobación: $AA^{-1} = (2\ -1\ 0\ 1)\frac{1}{2}(1\ 1\ 0\ 2) = \frac{1}{2}(2\ 0\ 0\ 2) = (1\ 0\ 0\ 1) = I$

4.-
a) Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones que dé solución al siguiente problema:
Un inversor compró acciones de las empresas A, B y C por un valor total de 20000 euros, invirtiendo en C el doble que en A. Al cabo de un año la empresa A le pagó el 6% de beneficio, la B el 8% y la C el 10%. Si el beneficio total fue de 1720 euros, ¿qué dinero invirtió en cada empresa?

Resolución

Sean x, y, z el dinero en € invertido en las empresas A, B y C, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema
$\{x + y + z = 20000\ z = 2x\ 0,06x + 0,08y + 0,1z = 1720 \quad .50 \quad \{x + y + z = 20000\ 2x - z = 0\ 3$

b) Resuelva la ecuación $|1\ 3\ -5\ 4\ 2 + x\ x\ -1\ 1\ -3\ |$

Resolución

$|1\ 3\ -5\ 4\ 2 + x\ x\ -1\ 1\ -3\ | \quad f2 - 4f1\ f3 + f1 \quad |1\ 3\ -5\ 0\ x - 10\ x + 20\ 0\ 4\ -8\ | = 1.\,|x - 10\ x$

Luego, –12x = 0 ⇔ x = 0, que es la solución de la ecuación

5.- Sea la matriz $A = (3\ m\ 1\ -m\ m + 1\ )$
a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

Resolución

det A = 3m + 3 – m + m^2 = m^2 + 2m + 3 = 0 ⇔ $m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$, imposible.

Luego, A tiene inversa para cualquier valor de m.
b) Haciendo m = 0, resuelva la ecuación matricial AXA = I_2, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

Resolución

Para m = 0, $A = (3\ 0\ 1\ 1\ )$. Sabemos del a) que A tiene inversa y que det A = 3

Además, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{3}adj(3\ 1\ 0\ 1\ ) = \frac{1}{3}(1\ 0\ -1\ 3\ )$

Multiplicando por A^{-1}, por la derecha y por la izquierda, $A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}\,I\,A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}A^{-1}$

$$X = \frac{1}{3}(1\ 0\ -1\ 3\ )\frac{1}{3}(1\ 0\ -1\ 3\ ) = \frac{1}{9}(1\ 0\ -4\ 9\ ) = \left(\frac{1}{9}\ 0\ \frac{-4}{9}\ 1\right)$$

6.-
a) Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:
x – 2y + z = 0, 2x + y – z = 5, 4x + 7 y – 5z = 15.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1\ -2\ 1\ 2\ 1\ -1\ 4\ 7\ -5\ )$ y
$A^{*} = (1\ -2\ 1\ 0\ 2\ 1\ -1\ 5\ 4\ 7\ -5\ 15\ )$

---

det A = –5 + 8 + 14 – 4 + 7 – 20 = 0 y como $|1\ \ -\ 2\ 2\ 1\,| = 5 \neq 0$, rg A = 2.

$A^{*} = (1\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 2\ 1\ \ -\ 1\ 5\ 4\ 7\ \ -\ 5\ 15)\ f2 - 2f1\ f3 - 4f1\ (1\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 5\ \ -\ 3\ 5\ 0\ 15\ \ -\ 9\ 15)\ \ f3 = 3f2\ (1\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 5\ \ -\ 3\ 5)$

Como $|1\ \ -\ 2\ 0\ 5\,| = 5 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $(1\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 5\ \ -\ 3\ 5\,)$, que corresponde al sistema $\{x - 2y + z = 0\ 5y - 3z = 5$.

En la 2ª ecuación, $y = \frac{5+3z}{5}$; en la 1ª ecuación, $x = 2y - z = 2\frac{5+3z}{5} - z = \frac{10+6z-5z}{5} = \frac{10+z}{5}$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{10+k}{5}\ y = \frac{5+3k}{5}\ z = k$, con k ∈ R

b) Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad
$X(1\ 3\ 0\ 1\,) - 2(1\ 5\ \ -\ 1\ 2\,) = (-\ 1\ 7\ 1\ \ -\ 1\,)$

Resolución

Llamando $A = (1\ 3\ 0\ 1\,)$, $B = (1\ 5\ \ -\ 1\ 2\,)$ y $C = (-\ 1\ 7\ 1\ \ -\ 1\,)$ queda la ecuación XA – 2B = C ⇒ XA = C + 2B.

Como det A = 1 ≠ 0, existe A^{-1} y $A^{-1} = \frac{1}{\det \det A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{1}adj(1\ 0\ 3\ 1\,) = (1\ \ -\ 3\ 0\ 1\,)$

Multiplicando por A^{-1}, por la derecha, $XAA^{-1} = (C + 2B)A^{-1}$, $X = (C + 2B)A^{-1}$

$X = [(-\ 1\ 7\ 1\ \ -\ 1\,) + 2(1\ 5\ \ -\ 1\ 2\,)](1\ \ -\ 3\ 0\ 1\,) = (1\ 17\ \ -\ 1\ 3\,)(1\ \ -\ 3\ 0\ 1\,) = (1\ 14\ \ -\ 1\ 6\,)$