الـقدرات المـنـتظرة

- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين.و استعمال المناسب منها حسب الوضعية,
- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي,
- ادراك و تحديد التقريب بدقة معلومة.
- كتابة عبارة تتظمن قيمة مطلقة واستعمالها للتعبير عن مسافة.

هيكلة الدرس:

1. **الترتيب**
2. **المجالات**
3. **القيمة المطلقة و المسافة**
4. **الحصر**
5. **القيم المقربة**
6. **تمارين شاملة**

1) الترتيب:

نشاط 1: a عدد حقيقي. قارن بين a^2+1 و $2a$

الحل: ليكن a عدد حقيقي .لدينا $a^2+1-2a=(a-1)^2$ و هو مقدار موجب

وعليه فان $a^2+1\geq 2a$

تعريف: a و b عددان حقيقيان .

القول a أكبر من او يساوي b و نكتب $a\geq b$ معناه $(a-b)$ عدد حقيقي موجب.

القول a اصغر من او يساوي b و نكتب $a\leq b$ معناه $(a-b)$ عدد حقيقي سالب.

ملاحظة 1: A و B نقطتان من المستقيم العددي فاصلتاهما a و b على الترتيب.

$a\leq b$ معناه النقطة A تقع على يسار النقطة B.

ملاحظة2: مقارنة عددين a و b معناه التحقق من صحة إحدى الحالات : $a<b$, $a>b$, $a=b$

مثال: $(9-2\sqrt{3})-(5,53)\approx 0,0059$ و عليه $(9-2\sqrt{3})>(5,53)$

تطبيق: a و b عددين حقيقين غير معدومين و $a\neq b$. قارن بين العددين A و B حيث : $A=1-\frac{b}{a}$ و $B=\frac{a}{b}-1$ (ناقش حسب إشارة a و b)

الحل:ليكن a و b عددين حقيقين مختلفين و غير معدومين.

$$A-B=\left(1-\frac{b}{a}\right)-\left(\frac{a}{b}-1\right)$$

$$= 1 - \frac{b}{a} - \frac{a}{b} + 1$$
$$= \frac{2ab - b^2 - a^2}{ab}$$
$$= -\frac{(a-b)^2}{ab}$$

$(a-b)^2$ $(a-b)^2$ مقدار موجب تماما $(a \neq b\ a \neq b)$

وعليه لما a و b a و b من نفس الإشارة نجد ab ab موجب و منه يكون $A-B$ $A-B$ سالب تماما

إذن $A < B$ $A < B$

و لما a و b a و b من إشارتين مختلفتين نجد ab ab سالب و منه يكون $A-B$ موجب تماما $A-B$

إذن $A > B$ $A > B$

خواص:

نشاط : a a و b b و c c أعداد حقيقية حيث $a \leq b$ $a \leq b$ و $b \leq c$ $b \leq c$

عين إشارة العدد $a-c$ $a-c$. استنتج مقارنة العددين aa و cc .

الحل: $a \leq b$ $a \leq b$ معناه أن $a-b$ $a-b$ سالب

$b \leq c$ $b \leq c$ معناه أن $b-c$ $b-c$ سالب

بالجمع نجد $(a-b)+(b-c) = a-c$ $(a-b)+(b-c) = a-c$

و منه $a-c$ $a-c$ سالب و هذا يعني أن $a \leq c$ $a \leq c$

خواص و نتائج:

أعداد حقيقية : $a; b; c; d$ $a; b; c; d$

* إذا كان $a \geq b$ $a \geq b$ و $b \geq c$ $b \geq c$ فإن $a \geq c$ $a \geq c$.
* إذا كان $a \geq b$ $a \geq b$ فإن $a+c \geq b+c$ $a+c \geq b+c$.
* إذا كان $a \geq b$ $a \geq b$ و $c \geq d$ $c \geq d$ فإن $a+c \geq b+d$ $a+c \geq b+d$.
* إذا كان $a \geq b$ $a \geq b$ و $c \geq 0$ $c \geq 0$ فإن $ac \geq bc$ $ac \geq bc$.

$ac \leq bc\ ac \leq bc$ فإن $c \leq 0\ c \leq 0$ و $a \geq b\ a \geq b$.

* اذا كانت $a;b;c;d\ a;b;c;d$ أعداد موجبة و كان : $a \leq b\ \ a \leq b$ و $c \geq d$

$ac \leq bd\ ac \leq bd$ فان $c \geq d$

* اذا كان $a;b\ a;b$ موجبين :

$a \leq b\ a \leq b$ $\quad$ $a^2 \leq b^2\ \ ^2 \leq b^2$ معناه

$a \leq b\ \ a \leq b$ $\quad$ $\sqrt{\ } \leq \sqrt{b}\ \sqrt{\ } \leq \sqrt{b}$ معناه

* اذا كان $a;b\ a;b$ موجبين تماما: $a \leq b\ \ a \leq b$ معناه $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

* اذا كان $0 \leq a \leq 1\ 0 \leq a \leq 1$ فإن $a^3 \leq a^2 \leq a\ a^3 \leq a^2 \leq a$ .....

* اذا كان $a \geq 1\ a \geq 1$ فإن $a^3 \geq a^2 \geq a\ a^3 \geq a^2 \geq a$ .....

تطبيق 1: a و b $\ a$ و b عددين حقيقين حيث:

$-2 \leq a \leq 3$

تطبيق 2: $x\ x$ عدد حقيقي موجب تماما

1) بين أن $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

2) قارن بين $\frac{1}{2x}\frac{1}{2x}$ و $\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{x^2-1} - x$

حل التطبيق 1

نضع $A = a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1\ A = a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1$

$$A = a^2 + 4a + 4 - b^2 - 2b - 1 - a - 3b - 2$$
$$= (a+2)^2 - (b+1)^2 - a - 3b - 2$$

و بما أن $-2 \leq a \leq 3 - 2 \leq a \leq 3$ معناه $0 \leq a+2 \leq 5\ 0 \leq a+2 \leq 5$

وهذا يعني أن $0 \leq (a+2)^2 \leq 25\ 0 \leq (a+2)^2 \leq 25$ .....(1)

وكذلك لدينا $-1 \leq b \leq 4 - 1 \leq b \leq 4$ اي $0 \leq b+1 \leq 5\ 0 \leq b+1 \leq 5$

و هذا يعني أن $0 \leq (b+1)^2 \leq 25\ 0 \leq (b+1)^2 \leq 25$ اي $-25 \leq -(b+1)^2 \leq 0$

.....(2) $-25 \leq -(b+1)^2 \leq 0$

و كذلك بما أن $-2 \leq a \leq 3 - 2 \leq a \leq 3$ فإن $-3 \leq -a \leq 2 - 3 \leq -a \leq 2$

(3).....

و أن $-1 \leq b \leq 4$ $-1 \leq b \leq 4$ فإن $-12 \leq -3b \leq 3$ $-12 \leq -3b \leq 3$

(4).....

و من (1) و (2) و (3) و (4) نجد $-42 \leq (a+2)^2 - (b+1)^2 - a - 3b - 2 \leq 28$

$-42 \leq (a+2)^2 - (b+1)^2 - a - 3b - 2 \leq 28$

معناه أن $-42 \leq A \leq 28$ $-42 \leq A \leq 28$

حل التطبيق 2: $x > 0$ $x > 0$

1-إثبات أن $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

2- المقارنة بين $\frac{1}{2x}$ $\frac{1}{2x}$ و $\sqrt{x^2-1} - x$ $\sqrt{x^2-1} - x$

يكفي المقارنة بين $\frac{1}{2x}$ $\frac{1}{2x}$ و $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

لدينا $x > 0$ $x > 0$ و منه $x^2 + 1 > x^2$ $x^2 + 1 > x^2$ إذن $\sqrt{x^2+1} > x$ $\sqrt{x^2+1} > x$

و بإضافة x x إلى الطرفين نجد: $\sqrt{x^2+1} + x > 2x$ $\sqrt{x^2+1} + x > 2x$

إذن يكون: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \frac{1}{2x}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \frac{1}{2x}$

و عليه يكون $\sqrt{x^2-1} - x < \frac{1}{2x}$ $\sqrt{x^2-1} - x < \frac{1}{2x}$

2) المـجالات في $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

1-مجالات المجموعة $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

ليكن a a و b b عددين حقيقيين حيث $a < b$ $a < b$

مجموعة الأعداد حيث x x	ترميزها	القرائة و التمثيل علي المستقيم العددي
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	a b المجال المغلق الذي طرفاه a a و b b
$a \leq x < b$	$[a;b[$	a b
$a < x \leq b$	$]a;b]$	a b
$a < x < b$	$]a;b[$	a b
$x \leq b$	$]-\infty;b]$ $]-\infty;b]$	$-\infty$ b
$x < b$	$]-\infty;b[$	$-\infty$ b
$a \leq x$	$[a;+\infty[$	a $+\infty$
$a < x$	$]a;+\infty[$	a $+\infty$

ملاحظات :

- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ هي المجال $]-\infty;+\infty[$ $]-\infty;+\infty[$
- إذا كان المجال $\mathbb{I}$ $\mathbb{I}$ مفتوح عند a a فإن هذا يعني أن a a لا ينتمي الى $\mathbb{I}$ $\mathbb{I}$ ($a \notin \mathbb{I}$ $a \notin \mathbb{I}$)

- و اذا كان مغلق عند a a فإن هذا يعني أن a a ينتمي إلى $\mathbb{I}$ $\mathbb{I}$

أمثلة:

$[-1;4] = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 4\}$ $[-1;4] = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 4\}$

$]-1;4[= \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 4\}$

نلاحظ أن $-1 \notin]-1;4[$ $-1 \notin]-1;4[$ و كذالك $-4 \notin]-1;4[$ $-4 \notin]-1;4[$

$]-\infty;2[= \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$

العدد 2 لا ينتمي الى المجال $]-\infty;2[$ $]-\infty;2[$ و $]-\infty;2[$ و $-\sqrt{5} \in]-\infty;2[$ $-\sqrt{5} \in]-\infty;2[$

$\pi \notin]-\infty;2[$ $\pi \notin]-\infty;2[$

2- تقاطع و اتحاد مجالين

- تقاطع مجالين ***I*** و ***J*** هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى كل من ***I*** و ***J***
- اتحاد مجالين ***I*** **و** ***J*** هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى ***I*** أو إلى ***J***

أمثلة

$[0;2] \cap [1;6] = [1;2]$

$[0;2] \cup [1;6[= [0;6[$

$]-\infty;3] \cap]1;4[=]1;3]$

$]-\infty;3] \cup]1;4[=]-\infty;4[$

$[-2;2] \cap]2;+\infty[= \emptyset$

$[-2;2] \cup]2;+\infty[= [-2;+\infty[$

3) القيمة المطلقة

1) تعريف: x عدد حقيقي , M نقطة من مستقيم عددي مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتها x

.

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM و نرمز لها بالرمز $|x|$ اي $OM = |x|$

$OM = |x|$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ اذا كان $x \geq 0$ فان $|x| = x$

اذا كان $x < 0\, x < 0$ فان $|x| = -x\, |x| = -x$

أمثلة:

$|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$

$|-12| = 12$

$|2-3\sqrt{11}| = -(2-3\sqrt{11})$

$= 3\sqrt{11}-2$

3) خواص:

1) $M\, M$ و $N\, N$ نقطتان متناظرتان من مستقيم عددي مبدؤه $O\, O$ اذن $OM = ON$

$OM = ON$

و منه $|x| = |-x|\, |x| = |-x|$

2) لكل x من $\mathbb{R}\, \mathbb{R}$ لدينا : $|x| \geq 0\, |x| \geq 0$

$x \leq |x|\, x \leq |x|$

$-x \leq |x|\, -x \leq |x|$

$|x|^2 = |x^2|\, |x|^2 = |x^2|$

$\sqrt{x^2} = |x|\, \sqrt{x^2} = |x|$

3) لكل $x\, x$ و $y\, y$ من $\mathbb{R}\, \mathbb{R}$ و $a\, a$ من $\mathbb{R}^+\, \mathbb{R}^+$ لدينا :

* $|x| = 0\, |x| = 0$ تكافئ $x = 0\, x = 0$

* $|x| = a\, |x| = a$ تكافئ $x = a\, x = a$ او $x = -a\, x = -a$

* $|x| = |y|\, |x| = |y|$ تكافئ $x = y\, x = y$ او $x = -y\, x = -y$

* $|xy| = |x||y|\, |xy| = |x||y|$

* و من اجل $y \neq 0\, y \neq 0$ فان $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

* $|x+y| \leq |x| + |y|\, |x+y| \leq |x| + |y|$ (متباينة المثلث)

ملاحظة : اذا كان لـ $x\ x$ و $y\ y$ نفس الإشارة فانه يكون : $|x+y|=|x|+|y|$

$|x+y|=|x|+|y|$

أمثلة:

- $|1-3\sqrt{2}|=|3\sqrt{2}-1|=3\sqrt{2}-1\ |1-3\sqrt{2}|=|3\sqrt{2}-1|=3\sqrt{2}-1$
- $\sqrt{(2-\pi)^2}=|2-\pi|=\pi-2\ \sqrt{(2-\pi)^2}=|2-\pi|=\pi-2$
- $|-2(x+1)|=|-2||x+1|=2|x+1|$

  $|-2(x+1)|=|-2||x+1|=2|x+1|$
- $|x-2|\leq|x|+|-2|\ |x-2|\leq|x|+|-2|$
- $\leq|x|+2\leq|x|+2$

تمرين 1 : ليكن $x\ x$ عدد حقيقي

1- اكتب العبارات التالية بدون رمز القيمة المطلقة

. $B=|3-x|\ B=|3-x|$. $A=|2x-1|\ A=|2x-1|$

$C=|x-2|+|x+3|\ C=|x-2|+|x+3|$

2- بيِن بدون حذف رمز القيمة المطلقة أن لكل $x\ x$ من $\mathbb{R}\ \mathbb{R}$: $|x-5|+|x+1|\neq4$

$|x-5|+|x+1|\neq4$

تمرين2 : بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\ x$:

اذا كان $|x-1|<10^{-3}\ |x-1|<10^{-3}$ فان $|x^2-1|<10^{-2}\ |x^2-1|<10^{-2}$

الحل :

$$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|$$
$$=|x-1||x+1|$$

و بما أن $|x-1|<10^{-3}\ |x-1|<10^{-3}$ فإن

$$|x-1||x+1|<10^{-3}|x+1|$$

أي $|x^2-1|<10^{-3}|x+1|\ |x^2-1|<10^{-3}|x+1|$

حتى يكون $|x^2-1|<10^{-2}$ يكفي ان يكون $|x^2-1|<10^{-2}$ $10^{-3}|x+1|<10^{-2}$

$10^{-3}|x+1|<10^{-2}$

أي $|x+1|<10$ $|x+1|<10$ ومنه

لدينا $|x-1|<10^{-3}$ $|x-1|<10^{-3}$ و منه $-10^{-3}<x-1<10^{-3}$

$-10^{-3}<x-1<10^{-3}$

ومنه $2-10^{-3}<x+1<2+10^{-3}$ $2-10^{-3}<x+1<2+10^{-3}$

و $2+10^{-3}<10$ $2+10^{-3}<10$ و $-10<2-10^{-3}$ $-10<2-10^{-3}$

اذن $-10<x+1<10$ $-10<x+1<10$

ومنه $|x+1|<10$ $|x+1|<10$ اذن و بالضرب في 10^{-3} 10^{-3} ينتج

$10^{-3}|x+1|<10^{-2}$ $10^{-3}|x+1|<10^{-2}$

وبالتالي ينتج $|x^2-1|<10^{-2}$ $|x^2-1|<10^{-2}$

4) المسافة بين نقطتين:

خاصية: إذاكانت A و B A و B نقطتين من مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ $(O;I)$ فصلتهما على التوالي a و b a و b فإن : $AB=|a-b|=|b-a|$ $AB=|a-b|=|b-a|$

ملاحظة:المسافة $|b-a|$ $|b-a|$ للنقطتين A و B A و B تسمى ايضا المسافة بين العددين a و b

و نرمز لها $d(a,b)$ $d(a,b)$ و نكتب : $d(a;b)=|a-b|=|b-a|$

$d(a;b)=|a-b|=|b-a|$

مثال1: الأعداد x التي مسافتها الى 3 هي 5 تحقق : $d(x;3)=5$ $d(x;3)=5$

طريقة 1) $d(x;3)=5$ $d(x;3)=5$ اي ان $|x-3|=5$ $|x-3|=5$ و منه

$x-3=5$ $x-3=5$ او $x-3=5$ $x-3=5$

و بالتالي يكون $x=8$ $x=8$ او $x=-2$ $x=-2$

طريقة 2) لتكن $A\ A$ نقطة من المستقيم المزود بمعلم $(O;I)\ (O;I)$ فاصلتها 3 و $M\ M$ نقطة فاصلتها $x\ x$ اذن $d(x;3)=5\ d(x;3)=5$ تعني ان $AM=5\ AM=5$ و منه

$x=3+5\ x=3+5$ او $x=3-5\ x=3-5$

وهذا يعني ان $x=8\ x=8$ او $x=-2\ x=-2$

طريقة 3) $|x-3|=5\ |x-3|=5$ اذن $|x-3|^2=5^2\ |x-3|^2=5^2$ و منه

$(x-3)^2-5^2=0\ (x-3)^2-5^2=0$

اذن $(x-3-5)(x-3+5)=0\ (x-3-5)(x-3+5)=0$ وبالتالي

$(x-8)(x+2)=0\ (x-8)(x+2)=0$

و منه نجد $x=8\ x=8$ او $x=-2\ x=-2$

مثال 2 عين الأعداد الحقيقية التي تحقق :

1. $|x-2|=|x+5|\ |x-2|=|x+5|$
2. $|x-2|+|x+5|=7\ |x-2|+|x+5|=7$
3. $|x-2|+|x+5|=2\ |x-2|+|x+5|=2$

الحل: استعمال المستقيم العددي

5) عناصر مجال :ليكن $a\ a$ و $b\ b$ عددين حقيقيين و I مجال حداه $a\ a$ و $b\ b$

I هو مركز المجال $m=\frac{a+b}{2}\ m=\frac{a+b}{2}$

I هو طول المجال $l=|a-b|\ l=|a-b|$

I نصف قطر المجال $R=\frac{l}{2}=\frac{|a-b|}{2}\ R=\frac{l}{2}=\frac{|a-b|}{2}$

تمرين :

1- حدد مركز و نصف قطر المجال $]-3;5[\ ]-3;5[$

2- حدد المجال المفتوح الذي مركزه 2- و نصف قطره 3

$\frac{-3}{2}\frac{-3}{2}$ 3- حدد مجال مغلق مركزه *1* و أحد طرفيه

5) الحصـر

1-أنشطة

$\frac{2}{3}\frac{2}{3}$ 1) حدد المجالات المفتوحة التي سعتها $10^{-2}\,10^{-2}$ و تشمل العدد

$-3\sqrt{2}$ حدد مجالا مغلقا يشمل العدد $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42\,1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ 2) علما ان

$7X10^{-2}\,7X10^{-2}$ سعته $-3\sqrt{2}$

الحل:

1) ليكن $]a;b[\,]a;b[$ المجال المطلوب

سعته $10^{-2}\,10^{-2}$ معناه $b-a=\ 10^{-2}\,b-a=\ 10^{-2}$

يشمل العدد $\frac{2}{3}\frac{2}{3}$ معناه $a<\frac{2}{3}<b\,a<\frac{2}{3}<b$

و منه $b=a+10^{-2}\,b=a+10^{-2}$ اي ان $a<\frac{2}{3}<a+10^{-2}$

$a<\frac{2}{3}<a+10^{-2}$

و منه $\frac{2}{3}-10^{-2}<a<\frac{2}{3}\frac{2}{3}-10^{-2}<a<\frac{2}{3}$

و يكون $\frac{2}{3}<b<\frac{2}{3}+10^{-2}\,\frac{2}{3}<b<\frac{2}{3}+10^{-2}$

يمكن اختيار $a=0{,}66\,a=0{,}66$ و يكون $b=a+0{,}01\,b=a+0{,}01$

2) ليكن I $=[a;b]=[a;b]$ المجال المطلوب .

I يشمل $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ معناه $a<-3\sqrt{2}<b\,a<-3\sqrt{2}<b$

و سعته $7X10^{-2}\,7X10^{-2}$ معناه $b-a=7X10^{-2}\,b-a=7X10^{-2}$

و منه $b=a+7X10^{-2}\,b=a+7X10^{-2}$

و بما أن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ فإن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ $-4,26 < -3\sqrt{2} < -4,23$

$-4,26 < -3\sqrt{2} < -4,23$

لدينا $a \leq -3\sqrt{2} \leq b$ $a \leq -3\sqrt{2} \leq b$ اذن $a \leq -3\sqrt{2} \leq a + 7X10^{-2}$

$a \leq -3\sqrt{2} \leq a + 7X10^{-2}$

و منه $-3\sqrt{2} - 7X10^{-2} \leq a \leq -3\sqrt{2}$ $-3\sqrt{2} - 7X10^{-2} \leq a \leq -3\sqrt{2}$

و $-4,26 < -3\sqrt{2} < -4,23$ $-4,26 < -3\sqrt{2} < -4,23$

اذن $-4,26 - 7X10^{-2} < -3\sqrt{2} - 7X10^{-2} < -4,23 - 7X10^{-2}$

$-4,26 - 7X10^{-2} < -3\sqrt{2} - 7X10^{-2} < -4,23 - 7X10^{-2}$

اي $-4,33 < -3\sqrt{2} - 7X10^{-2} < -4,30$ $-4,33 < -3\sqrt{2} - 7X10^{-2} < -4,30$

اذن $-4,33 < a < -4,23$ $-4,33 < a < -4,23$ مثلا: $a = -4,30$ $a = -4,30$ نجد

$b = a + 0,07$ $b = a + 0,07$: لان $b = -4,23$ $b = -4,23$

2- **تعريف:** ليكن a a و b b عددين حقيقيين حيث $a < b$ $a < b$

كل متباينة مزدوجة $a < x < b$ $a < x < b$; $a \leq x < b$ $a \leq x < b$, $a \leq x \leq b$

تسمى حصرا للعدد x x $a < x \leq b$ $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$

سعته $b - a$ $b - a$

مثال1: $0 < \frac{2}{3} < 1$ $0 < \frac{2}{3} < 1$ حصرا للعدد $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ سعته 1

$0,66 < \frac{2}{3} < 0,67$ $0,66 < \frac{2}{3} < 0,67$ حصرا للعدد $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ سعته 10^{-2} 10^{-2}

مثال2 : اذا علمت ان $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ اعط حصرا للعدد $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

سعته $7X10^{-2}$ $7X10^{-2}$

تطبيق1: اذا علمت أن $1,53 < x < 1,54$ $1,53 < x < 1,54$ و $-1 < y < 0,02$

$-1 < y < 0,02$

عين حصرا للعدد $xy\ xy$ سعته $2X10^{-2}\ 2X10^{-2}$

الحل: لدينا $-1 < y < 0{,}02\ -1 < y < 0{,}02$ معنا $-1{,}1 < y - 0{,}01 < 0{,}03$

$-1{,}1 < y - 0{,}01 < 0{,}03$

و منه نجد $0 < x(y - 0{,}01) < 0{,}0462\ 0 < x(y - 0{,}01) < 0{,}0462$ و منه

$-1{,}683 < xy - 0{,}01x < 0{,}0462\ -1{,}683 < xy - 0{,}01x < 0{,}0462$

و لدينا $0{,}0153 < 0{,}01x < 0{,}0154\ 0{,}0153 < 0{,}01x < 0{,}0154$ اي

$-0{,}0154 < 0{,}01x < -0{,}0153\ -0{,}0154 < 0{,}01x < -0{,}0153$

و بالجمع نجد

تطبيق 2 : إذا علمت أن $1{,}2 < x < 1{,}4\ 1{,}2 < x < 1{,}4$ و $0{,}2 < y < 0{,}4\ 0{,}2 < y < 0{,}4$

عين حصرا للعدد $\frac{y}{x}\ \frac{y}{x}$ سعته $0{,}2\ 0{,}2$

3-القيمة المطلقة –الحصر –المجالات و المسافة

$a\ a$ عدد حقيقي كيفي و $r\ r$ عدد حقيقي موجب .

من أجل كل عدد حقيقي $x\ x$ لدينا :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$a - r < xa + r$	$[a - r; a + r]$	$d(x; a) \leq r$	$\lvert x - a\rvert \leq r$

تطبيق:التمرين81 ص 47

6) القيم المقربة

1) **تعريف:** $a\ a$ و $b\ b$ عددين حقيقيين حيث $a < b\ a < b$

اذا كانت الثنائية $(a; b)\ (a; b)$ حصرا للعدد $x\ x$

نسمي $a\ a$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $b-a\ b-a$ بالنقصان

نسمي $b\ b$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $b-a\ b-a$ بالزيادة

مثال: لدينا $3,14<\pi<3,153,14<\pi<3,15$

العدد $3,143,14$ قيمة مقربة الى $10^{-2}\ 10^{-2}$ للعدد $\pi\ \pi$ بالنقصان

العدد $3,153,15$ قيمة مقربة الى $10^{-2}\ 10^{-2}$ للعدد $\pi\ \pi$ بالزيادة

2) **خاصية:** بوضع $r=b-a\ r=b-a$ حيث $a<b\ a<b$

$a\ a$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $r\ r$ بالزيادة معناه $a-r\leq x\leq a\ a-r\leq x\leq a$

$a\ a$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $r\ r$ بالنقصان معناه $a\leq x\leq a+r\ a\leq x\leq a+r$

تطبيق: ليكن $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

اذا علمت ان $2,2362,236$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{5}\sqrt{5}$ الى $10^{-3}\ 10^{-3}$ بالنقصان فاعط قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $10^{-3}\ 10^{-3}$ بالنقصان و بالزيادة

الحل: $2,2362,236$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{5}\sqrt{5}$ الى $10^{-3}\ 10^{-3}$ بنقصان معناه

$$2,236\leq\sqrt{5}\leq2,236+10^{-3}$$

اي ان $2,236\leq\sqrt{5}\leq2,237\ 2,236\leq\sqrt{5}\leq2,237$

و باضافة *1* الى كل الأطراف $3,236\leq1+\sqrt{5}\leq3,237\ 3,236\leq1+\sqrt{5}\leq3,237$

بالقسمة على *2* $1,618\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq1,6185$

$$1,618\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq1,6185$$

و بما ان $1,619-1618=10^{-3}\ 1,619-1618=10^{-3}$ فان

$$1,618\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq1,619\ 1,618\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq1,619$$

إذن $1,6181,618$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $10^{-3}\ 10^{-3}$ بالنقصان

و $1,6191,619$ قيمة مقربة للعدد $x\ x$ الى $10^{-3}\ 10^{-3}$ بالزيادة

3) **مبرهنة:** x عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب تماما .

كل عدد حقيقي a يحقق $|x-a| \leq r$ هو قيمة مقربة الى للعدد x r

البرهان: $|x-a| \leq r$ معناه ان $-r \leq x-a \leq r$

و بما ان $a-r \leq a \leq a+r$ فانه يكون

إما $a-r \leq x \leq a \leq a+r$ و هذا يعني ان a قيمة مقربة بالزيادة

للعدد x

و إما $a-r \leq a \leq x \leq a+r$ و هذا يعني أن a قيمة مقربة

بالنقصان للعدد x

مثال :لدينا $\left|\frac{22}{7}-3{,}14\right| \leq 0{,}03$ و منه $3{,}14$ قيمة مقربة للعدد

$\frac{22}{7}$ الى $3X10^{-3}$

تطبيق: حدد تقريبات للعدد $\frac{22}{3}$ الى 10^{-3}

الحل : ليكن a تقريب للعدد $\frac{22}{3}$ الى 10^{-3} معناه $\left|\frac{22}{3}-a\right| \leq 10^{-3}$

اي $10^{-3} \leq \frac{22}{7}-a \leq 10^{-3}$ و منه

$\frac{22}{3}-10^{-3} \leq a \leq \frac{22}{3}+10^{-3}$

اذن $7{,}332 \leq a \leq 7{,}334$

نتيجة :ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ و $x \in [a;b]$

كل عدد α من المجال $[a;b]$ هو تقريب للعدد x الى $b-a$

مثال: لدينا $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$

و العدد$1{,}415$ ينتمي الى المجال $[1{,}41;1{,}42]$ فهو تقريب للعدد $\sqrt{2}$

التقريبات العشرية: X عدد حقيقي و n عدد طبيعي .

نقبل انه يوجد عدد صحيح وحيد p p يحقق $p\,X10^{-n} \leq x \leq (p+1)X10^{-n}$

$p\,X10^{-n} \leq x \leq (p+1)X10^{-n}$

اذن العدد $p\,X10^{-n}$ $p\,X10^{-n}$ قيمة مقربة عشرية لـ x x الى 10^{-n} 10^{-n} بالنقصان

و العدد $(p+1)X10^{-n}$ $(p+1)X10^{-n}$ قيمة مقربة عشرية الى 10^{-n} 10^{-n} بالزيادة

ملاحظة: المدور الى 10^{-n} 10^{-n} هو القيمة المدورة العشرية الى 10^{-n} 10^{-n} الأقرب الى x x

مثال: $0{,}666 \leq \frac{2}{3} \leq 0{,}667$ $0{,}666 \leq \frac{2}{3} \leq 0{,}667$ اي $666X10^{-3} \leq \frac{2}{3} \leq 667X10^{-3}$

$666X10^{-3} \leq \frac{2}{3} \leq 667X10^{-3}$

و منه $0{,}666$ $0{,}666$ قيمة مقربة عشرية للعدد $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ الى 10^{-3} 10^{-3} بالنقصان

و العدد $0{,}667$ $0{,}667$ قيمة مقربة عشرية للعدد $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ الى 10^{-3} 10^{-3} بالزيادة

نلاحظ ان $0{,}666 - \frac{2}{3} = \frac{0{,}002}{3}$ $\frac{2}{3} - 0{,}666 = \frac{0{,}002}{3}$ و $0{,}667 - \frac{2}{3} = \frac{0{,}001}{3}$

$0{,}667 - \frac{2}{3} = \frac{0{,}001}{3}$

اذن $0{,}667$ $0{,}667$ هو المدور للعدد $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ الى 10^{-3} 10^{-3}

تطبيق: $1{,}24$ $1{,}24$ قيمة مقربة عشرية لعدد حقيقي x x الى 10^{-2} 10^{-2} بنقصان و ليكن

$-0{,}31 < y < -0{,}25$ $-0{,}31 < y < -0{,}25$

عين حصرا للعدد $\frac{y}{x}$ $\frac{y}{x}$ سعته $0{,}05$ $0{,}05$

الحل: لدينا $1{,}24 < x < 1{,}24 + 10^{-2}$ $1{,}24 < x < 1{,}24 + 10^{-2}$ اي ان $1{,}24 < x < 1{,}25$

$1{,}24 < x < 1{,}25$

$\frac{1}{1,25} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1,24}\frac{1}{1,25} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1,24}$ و منه

و لدينا $-0,31 < y < -0,25$ معناه $0,25 < -y < 0,31$

$0,25 < -y < 0,31$

و بالضرب نجد $\frac{0,25}{1,25} < \frac{-y}{x} < \frac{0,31}{1,24}\frac{0,25}{1,25} < \frac{-y}{x} < \frac{0,31}{1,24}$ و بالحساب و الصرب في -1 -1

نجد

$-0,25 < \frac{y}{x} < -0,20$ $-0,25 < \frac{y}{x} < -0,20$

و بما ان $-0,20 - (-0,25) = 0,05$ $-0,20 - (-0,25) = 0,05$ فان الحصر المطلوب هو

$-0,25 < \frac{y}{x} < -0,20$ $-0,25 < \frac{y}{x} < -0,20$

7) تمارين شاملة

التمرين الأول:

$a\ a$ و $b\ b$ عددان حقيقيان يحققان : $|a|<1\ |a|<1$ و $|b|<1\ |b|<1$

أثبت أن : $\left|\frac{a+b}{ab+1}\right|<1\ \left|\frac{a+b}{ab+1}\right|<1$

التمرين الثاني: $a\ a$ و $b\ b$ و $c\ c$ أعداد حقيقية

اذا علمت أن مدور $a\ a$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $3{,}1\ 3{,}1$ و مدور $b\ b$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $-2{,}3\ -2{,}3$ و مدور $c\ c$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $2{,}2\ 2{,}2$. عين حصرا لكل من العددين

$x\ x$ و $y\ y$ حيث: $x=ab^2\ x=ab^2$ و $y=\frac{\sqrt{ac}}{b}y=\frac{\sqrt{ac}}{b}$

التمرين الثالث: $ABC\ \ ABC$ مثلث قائم في $A\ A$ حيث

$AB=,\ AC=c,\ BC=b\ AB=,\ AC=c,\ BC=b$

اذا علمت ان $5{,}66\ 5{,}66$ قيمة مقربة عشرية للعدد $b\ b$ الى $10^{-2}\ 10^{-2}$ بنقصان و $3{,}4\ 3{,}4$ قيمة مقربة عشرية للعدد $a\ a$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ بزيادة .

أعط قيمة مقربة عشرية للعدد $87X10^{-3}\ 87X10^{-3}$ $c\ c$

تمرين 31ص44

مسألة 89ص48

حل التمرين 1: $|a|<1\ |a|<1$ معناه ان $(a^2-1)<1\ (a^2-1)<1$

$|b|<1\ |b|<1$ معناه ان $(b^2-1)<0\ (b^2-1)<0$

اذن و بالضرب نجد $(a^2-1)(b^2-1)>0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$(a^2-1)(b^2-1)>0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

و لدينا $(a^2-1)(b^2-1)=(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$

$(a^2-1)(b^2-1)=(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$

$=(a-1)(b-1)(a+1)(b+1)$

$=(ab-a-b+1)(ab+a+b+1)$

$=[(ab+1)-(a+b)][(ab+1)+(a+b)]$

$= (ab+1)^2 - (a+b)^2 = (ab+1)^2 - (a+b)^2$

$(ab+1)^2 - (a+b)^2 > 0\ (ab+1)^2 - (a+b)^2 > 0$ و منه و من (1) نجد

$(a+b)^2 < (ab+1)^2\ (a+b)^2 < (ab+1)^2$ اذن

$|a+b| < |ab+1|\ |a+b| < |ab+1|$ و منه نجد

$\left|\frac{a+b}{ab+1}\right| < 1\ \left|\frac{a+b}{ab+1}\right| < 1$ و هذا يعني ان $|ab+1| \neq 0$ حيث ان

$|ab+1| \neq 0$

حل التمرين2 :

مدور $a\ a$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $3{,}1\ 3{,}1$ معناه $3{,}05 \leq a \leq 3{,}14\ 3{,}05 \leq a \leq 3{,}14$

مدور $b\ b$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $-2{,}3\ -2{,}3$ معناه $-2{,}3 \leq b \leq -2{,}25$

$-2{,}3 \leq b \leq -2{,}25$

مدور $c\ c$ الى $10^{-1}\ 10^{-1}$ هو $2{,}2\ 2{,}2$ معناه $2{,}15 \leq b \leq 2{,}24\ 2{,}15 \leq b \leq 2{,}24$

و منه $5{,}06 \leq b^2 \leq 5{,}48\ 5{,}06 \leq b^2 \leq 5{,}48$

اذن $15{,}43 \leq ab^2 \leq 17{,}20\ 15{,}43 \leq ab^2 \leq 17{,}20$ اي $15{,}43 \leq x \leq 17{,}20$

$15{,}43 \leq x \leq 17{,}20$

كذلك $6{,}56 \leq ac \leq 7{,}03\ 6{,}56 \leq ac \leq 7{,}03$ ومنه $2{,}56 \leq \sqrt{ac} \leq 2{,}65$

$2{,}56 \leq \sqrt{ac} \leq 2{,}65$

و $-0{,}44 \leq \frac{1}{b} \leq -0{,}43\ -0{,}44 \leq \frac{1}{b} \leq -0{,}43$ ومنه $0{,}43 \leq -\frac{1}{b} \leq 0{,}44$

$0{,}43 \leq -\frac{1}{b} \leq 0{,}44$

اذن $1{,}10 \leq -\frac{\sqrt{ac}}{b} \leq 1{,}17\ 1{,}10 \leq -\frac{\sqrt{ac}}{b} \leq 1{,}17$ و منه $-1{,}17 \leq \frac{\sqrt{ac}}{b} \leq -1{,}10$

$-1{,}17 \leq \frac{\sqrt{ac}}{b} \leq -1{,}10$

$-1{,}17 \leq y \leq -1{,}10\ -1{,}17 \leq y \leq -1{,}10$ اي

حل التمرين3 :

لدينا حسب فيثاغورث $a^2+c^2=b^2\ a^2+c^2=b^2$ و هذا يعني ان $c^2=b^2-a^2$

$c^2=b^2-a^2$

و $3{,}3\leq a\leq 3{,}4\ 3{,}3\leq a\leq 3{,}4$ اذن $10{,}89\leq a^2\leq 11{,}56\ 10{,}89\leq a^2\leq 11{,}56$

اي $-11{,}56\leq -a^2\leq -10{,}89\ -11{,}56\leq -a^2\leq -10{,}89$

و $5{,}66\leq b\leq 5{,}67\ 5{,}66\leq b\leq 5{,}67$ اذن $32{,}0356\leq b^2\leq 32{,}1489$

$32{,}0356\leq b^2\leq 32{,}1489$

اذن $20{,}4756\leq a^2-b^2\leq 21{,}2589\ 20{,}4756\leq a^2-b^2\leq 21{,}2589$ اي

$20{,}4756\leq c^2\leq 21{,}2589\ 20{,}4756\leq c^2\leq 21{,}2589$

و منه $4{,}52499\leq c\leq 4{,}6107\ 4{,}52499\leq c\leq 4{,}6107$ اذن $4{,}524\leq c\leq 4{,}611$

$4{,}524\leq c\leq 4{,}611$

و بما ان $4{,}611-4{,}524=0{,}087=87X10^{-3}\ 4{,}611-4{,}524=0{,}087=87X10^{-3}$

اذن $4{,}524\leq c\leq 4{,}611\ 4{,}524\leq c\leq 4{,}611$