

Rappel : l'usage de toute calculatrice, programmable ou non, est interdit.

Les différentes parties sont largement indépendantes.

—

1er Problème : Thermodynamique.

(. Transfert thermique

On s'intéresse aux échanges thermiques à travers les parois d'un bâtiment. On rappelle que tout échange thermique est caractérisé par le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}$ défini par : la puissance thermique traversant une surface orientée S est $P = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$.

1. On considère pour l'instant t le seul phénomène de conduction thermique, à l'intérieur d'un mur de conductivité thermique λ (1 telle que $\vec{j} = -\lambda \nabla T$), T désignant la température. Le mur est d'épaisseur e , soit x la normale à ce mur, S_1 sa surface. On supposera que la température ne dépend que de x . On note T_1 et T_2 les températures du mur respectivement en $x = 0$ et $x = e$.

1.a. Calculer la puissance thermique traversant une section S_1 du mur d'abscisse x , $P(x)$, en fonction de $j(x)$ et S_1 .

1.b. Montrer qu'en régime permanent P est indépendant de x .

1.c. En déduire la température $T(x)$ et P , en fonction de T_1 , T_2 , λ et S_1 .

1.d. Calculer la résistance R_1 définie par $R_1 = (T_1 - T_2) / P$.

1.e. Justifier l'analogie électrique permettant de définir R_1 comme une « résistance ».

2. A la surface du mur en contact avec l'air, il y a également des phénomènes de convection, caractérisés par un coefficient conducto-convectif h tel que la densité de flux thermique entre un solide de température T_s et de l'air de température T_a est : $\vec{j} = h(T_s - T_a)\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur orthogonal à la surface de contact, dirigé de l'air vers le solide.

Le mur de surface S_1 sépare un bâtiment de température T_0 de l'extérieur de température T_3 avec $T_0 > T_3$.

2.a. Calculer les résistances thermiques R_2 et R_3 , associées à la convection sur les 2 surfaces du mur respectivement intérieure et extérieure.

2.b. Montrer que dans ce cas les résistances thermiques s'ajoutent, comme pour des résistances électriques en série.

2.c. En déduire la puissance thermique P traversant le mur en fonction des résistances thermiques, de T_0 et T_3 .

2.d. Calculer les températures des surfaces du mur T_1 et T_2 en fonction des résistances thermiques, de T_0 et T_3 .

3. Le bâtiment est constitué d'un mur de conductivité λ_1 , d'épaisseur e_1 et de surface totale S_1 , de vitres de conductivité λ_2 , d'épaisseur e_2 et de surface totale S_2 , ainsi que d'un toit plat de conductivité λ_3 , d'épaisseur e_3 et de surface totale S_3 .

On suppose que le coefficient de transfert conducto-convectif h est le même sur toutes les surfaces (mur, vitres, toit).

Exprimer la puissance totale P' perdue par le bâtiment, en régime permanent, c'est-à-dire lorsque T_0 et T_3 sont maintenues constantes.

II Pompe à chaleur

Pour maintenir la température du bâtiment constante, on utilise une pompe à chaleur. Celle-ci fonctionne entre le bâtiment de température T_0 et l'extérieur de température T_3 avec bien sûr $T_0 > T_3$.

Dans cette pompe, n moles d'air, considéré comme un gaz parfait, décrivent les cycles suivants :

- A1-A2 est une compression isotherme à la température T_0 de la pression p_1 à la pression p_2 .
- A2-A3 est une détente adiabatique jusqu'à la température T_3 .
- A3-A4 est une détente isotherme à la température T_3 .
- A4-A1 est une compression adiabatique.

On donne le rapport γ des chaleurs molaires à pression et à volume constant.

On suppose d'abord ces transformations réversibles.

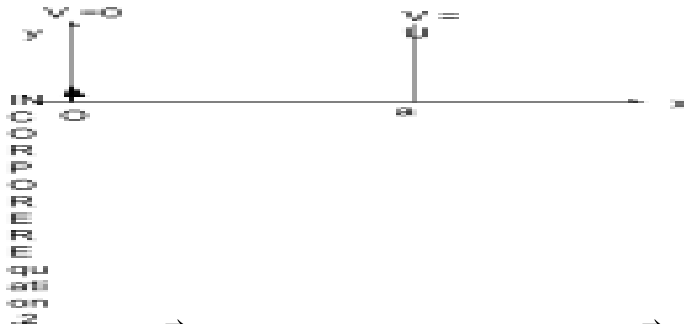
1. Calculer la pression aux points A3 et A4 en fonction de γ , des températures T_0 et T_3 et des pressions p_1 et p_2 .
2. Représenter le cycle en diagramme de Clapeyron $p(V)$, en précisant la position de chaque point.
3. Calculer le travail et les échanges thermiques pour chaque transformation, en fonction de T_0 , T_3 , p_1 , p_2 , n , R et γ .
4. Calculer la variation d'entropie au cours de chaque transformation, en fonction des mêmes paramètres.
5. En déduire le diagramme entropique $T(S)$.
6. Calculer l'efficacité, e , de la pompe à chaleur en fonction des températures.
7. L'efficacité réelle n'est que $e_r = 80\%$ de l'efficacité précédente. Pour quelle raison ?
8. La pompe à chaleur sert à compenser les pertes thermiques P' du bâtiment étudié au I. En déduire la puissance mécanique $P_{\text{méca}}$ qu'elle consomme, en fonction de P' , e_r et e .
9. Le moteur qui alimente la pompe à un rendement $\eta = 60\%$. En déduire la puissance réelle $P_{\text{réel}}$ consommée par la pompe à chaleur.

2^{ème} Problème : Mécanique :

Données : $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C et masse de l'électron $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.

I Mouvement dans un champ électrique :

1. Deux plans conducteurs parfaits infinis d'équation respective $x = 0$ et $x = a$ sont portés au potentiel respectif $V(x=0) = 0$ et $V(x=a) = U$. L'espace interconducteur est le vide.



Montrer que le champ électrique $\vec{E}$, dans le vide, est uniforme. Calculer $\vec{E}$ et $V(x)$ dans le vide interconducteur.
A.N. Calculer E avec $U = 10$ kV et $a = 1$ m.

2. Un électron de charge $-e$ et de masse m entre à l'instant initial en $x = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$, avec $v_0 > 0$. Montrer que son poids est négligeable devant la force électrique.

3. Calculer sa vitesse à tout instant et déterminer sa trajectoire. A quelle condition sur U son mouvement s'effectue-t-il dans l'espace interconducteur ?

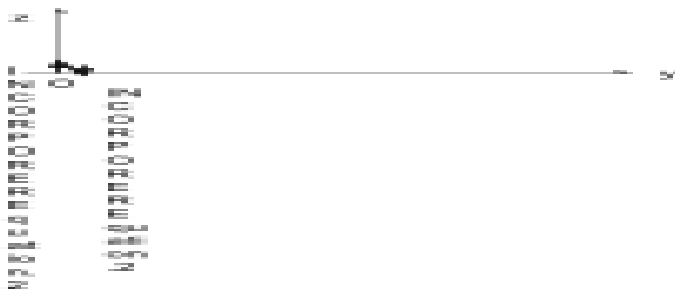
4. A quelle date sort-il de l'espace interconducteur ? Exprimer alors sa vitesse $\vec{v}_1$ et sa position.

5. On place en $y = y_0$ et $x = a$ une fente très fine. Montrer que ce dispositif permet de sélectionner des électrons de vitesse v_0 donnée. Relier v_0 à y_0 .

(I Mouvement dans un champ magnétique :

A l'instant initial, l'électron est cette fois introduit à l'origine O du repère avec une vitesse initiale INCORPORER

Equation.2 dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$.
On supposera toujours son poids négligeable.



1. Calculer la puissance de la force magnétique. En déduire que le champ magnétique ne peut modifier la norme de la vitesse de l'électron.

2. Déterminer les équations différentielles vérifiées par les coordonnées de l'électron.

3. Montrer que l'électron reste dans le plan $z = 0$.

4. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On posera $\omega = eB/m$.

5. Montrer que la trajectoire est circulaire et déterminer son rayon R.

6. On montre que toute particule accélérée rayonne une puissance proportionnelle à la moyenne du carré de son accélération : $p = K \langle a^2 \rangle$. Calculer P sur la trajectoire de rayon R, en fonction de ω et v_0 .

7. Dans les anneaux de stockage des accélérateurs de particules, on conserve des particules accélérées en les maintenant sur des trajectoires circulaires. Suffit-il d'un champ magnétique constant pour ce stockage ? Quelle solution proposez-vous ?

8. Dans les accélérateurs de particules, les électrons ont en général des vitesses relativistes. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{p} = \gamma \vec{v} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$$

avec

$$\alpha = \frac{v^2}{c^2}, \text{ c étant la vitesse de la lumière.}$$

8.a.

Vérifier qu'on retrouve le principe fondamental de la dynamique classique si la vitesse v est négligeable devant c .

8.b. Montrer que, même pour une particule relativiste, la norme de la vitesse n'est pas modifiée par le champ magnétique.

8.c. Déduire des calculs précédents le rayon de la trajectoire pour la particule relativiste de vitesse initiale INCORPORER Equation.2 dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme INCORPORER Equation.2.

8.d. A.N. Calculer le rayon de la trajectoire pour $\gamma = 10^5$ et $B = 1\text{T}$. Commentaire.

9. Comment peut-on utiliser un champ magnétique pour sélectionner, dans un faisceau d'électrons de vitesses initiales toutes parallèles à Oy, ceux de vitesse v donnée ? On précisera la réponse.

10. Dans le cas non relativiste, on tient compte du frottement exercé par le milieu sur l'électron : l'électron subit la force $-\lambda \vec{v}$ où λ est une constante positive et où $\vec{v}$ est sa vitesse. On pose $\omega = eB/m$ et $\tau = m/k$.

10.a. Ecrire les équations différentielles vérifiées par x , y et z .

10.b. En déduire l'équation de la trajectoire. Tracer son allure.

10.c. Déterminer les coordonnées du point asymptotique P.

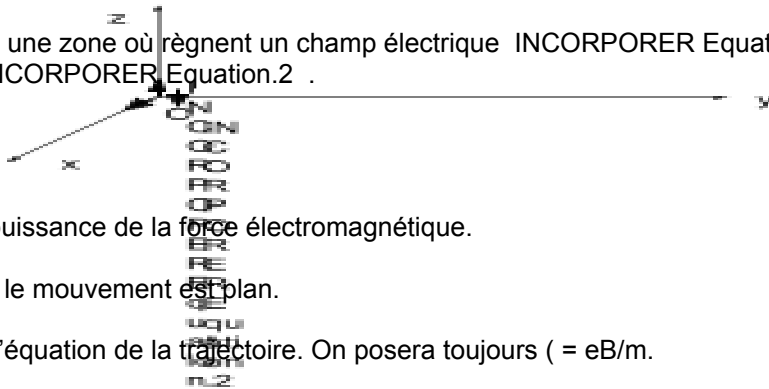
((

I Mouvement dans des champs électrique et magnétique :

L'électron est introduit à l'instant initial, à l'origine O du repère avec une vitesse initiale INCORPORER Equation.2

. On revient à un mouvement non relativiste.

Il pénètre dans une zone où règnent un champ électrique INCORPORER Equation.2 $\vec{E} = E\vec{u}_x$ et un champ magnétique INCORPORER Equation.2 .



1. Calculer la puissance de la force électromagnétique.

2. Montrer que le mouvement est plan.

3. Déterminer l'équation de la trajectoire. On posera toujours $\omega = eB/m$.

4. Pour quelle valeur v_m de v_0 , la trajectoire est-elle rectiligne ? Où faut-il placer une fente pour sélectionner les électrons ayant cette vitesse v_m ?