

Introduction :

Une vibration est un petit mouvement d'un système mécanique au voisinage d'une de ses positions d'équilibre stable lorsqu'elle existe. Un système mécanique peut avoir plusieurs ou aucune position d'équilibre et celles-ci lorsqu'elles existent peuvent être stables ou instables suivant le système des efforts appliqués à ce système. Pour étudier les vibrations mécaniques des systèmes mécaniques il faut donc rechercher ses positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

Intuitivement, on peut dire qu'une position d'équilibre d'un système mécanique est stable si, celui-ci légèrement perturbé à partir de cette position d'équilibre, y revient au bout d'un temps plus ou moins long. Elle est instable, s'il s'en éloigne indéfiniment.

Lorsque nous voulons prédire ou décrire un phénomène physique concret, nous pouvons généralement passer par un modèle analytique où les différentes grandeurs sont exprimées par des indéterminées et les lois de la physique par des fonctions dans la mesure où elles sont connues. En mettant un phénomène physique, nous traduisons la réalité en expérience mathématique, virtuelle, selon certaines règles. Dont l'étude de stabilité représente une bonne candidate pour la description de ce phénomène, ainsi une importance capitale dans l'étude des systèmes et des systèmes asservis.

Le problème de la stabilité des systèmes dynamiques a été le sujet de préoccupation majeur du travail de plusieurs mathématiciens. De 1800 à 1935 s'étale la période préclassique de la théorie de régulation pendant laquelle les principales contributions d'ordre mathématique furent établies. introduisent des équations différentielles pour l'étude des systèmes à contre-réaction et mettent en évidence le problème de la stabilité des systèmes bouclés. Les premiers à proposer des conditions de stabilité pour les systèmes régulés représentés par des équations différentielles sont J.C Maxwell et I.I Vyshnegradsky qui analysent la stabilité du régulateur à boucles de Watt .

Le mathématicien E.J Routh prolonge le travail de Maxwell et fournit une condition systématique pour tester la stabilité des racines d'une équation caractéristique d'un ordre quelconque. Le mathématicien A. Hurwitz se basant sur les travaux de Vyshnegradsky et de C. Hermite confirme ces mêmes résultats en réponse à un problème de régulation de turbines à eau .Enfin A.M. Lyapunov développe une théorie complète de la stabilité des systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles non linéaires en utilisant la notion d'énergie généralisée.

Nous nous proposons dans ce travail, de rappeler les conditions d'existence de positions d'équilibre pour les systèmes mécaniques et de passer en revue les différents critères de

stabilité rencontrés au cours de notre cursus. En guise d'illustration, chaque résultat sera appliqué au système mécanique conservatif constitué d'un pendule double.

I

Exemple d'illustration

I-Exemple d'illustration :le pendule double.

Dans le plan vertical fixe $(O; \overset{\curvearrowright}{x}, \overset{\curvearrowright}{y})$ du repère orthonormé direct et galiléen $R(O; \overset{\curvearrowright}{x}, \overset{\curvearrowright}{y}, \overset{\curvearrowright}{z})$ où $\overset{\curvearrowright}{Oy}$ est la verticale descendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\overset{\curvearrowright}{g}$ le système constitué de deux tiges rectilignes, homogènes et identiques (OA) et (AB) articulées parfaitement en A. Ces deux tiges sont de longueur $2L$, de masse m chacune et de centres d'inertie respectifs G_1 et G_2

On introduit les repères orthonormés directs $R_1(A; \overset{\curvearrowright}{a}; \overset{\curvearrowright}{b}; \overset{\curvearrowright}{z})$ lié à (OA) et $R_2(B; \overset{\curvearrowright}{u}, \overset{\curvearrowright}{v}, \overset{\curvearrowright}{z})$ lié à (AB) tels que :

$$\overset{\curvearrowright}{OG}_1 = L \overset{\curvearrowright}{a} \quad \text{et} \quad \overset{\curvearrowright}{AG}_2 = L \overset{\curvearrowright}{u}$$

Et on pose : $\psi_1 = (\overset{\curvearrowright}{Oy}, \overset{\curvearrowright}{Oa})$ et $\psi_2 = (\overset{\curvearrowright}{Ay}, \overset{\curvearrowright}{Au})$

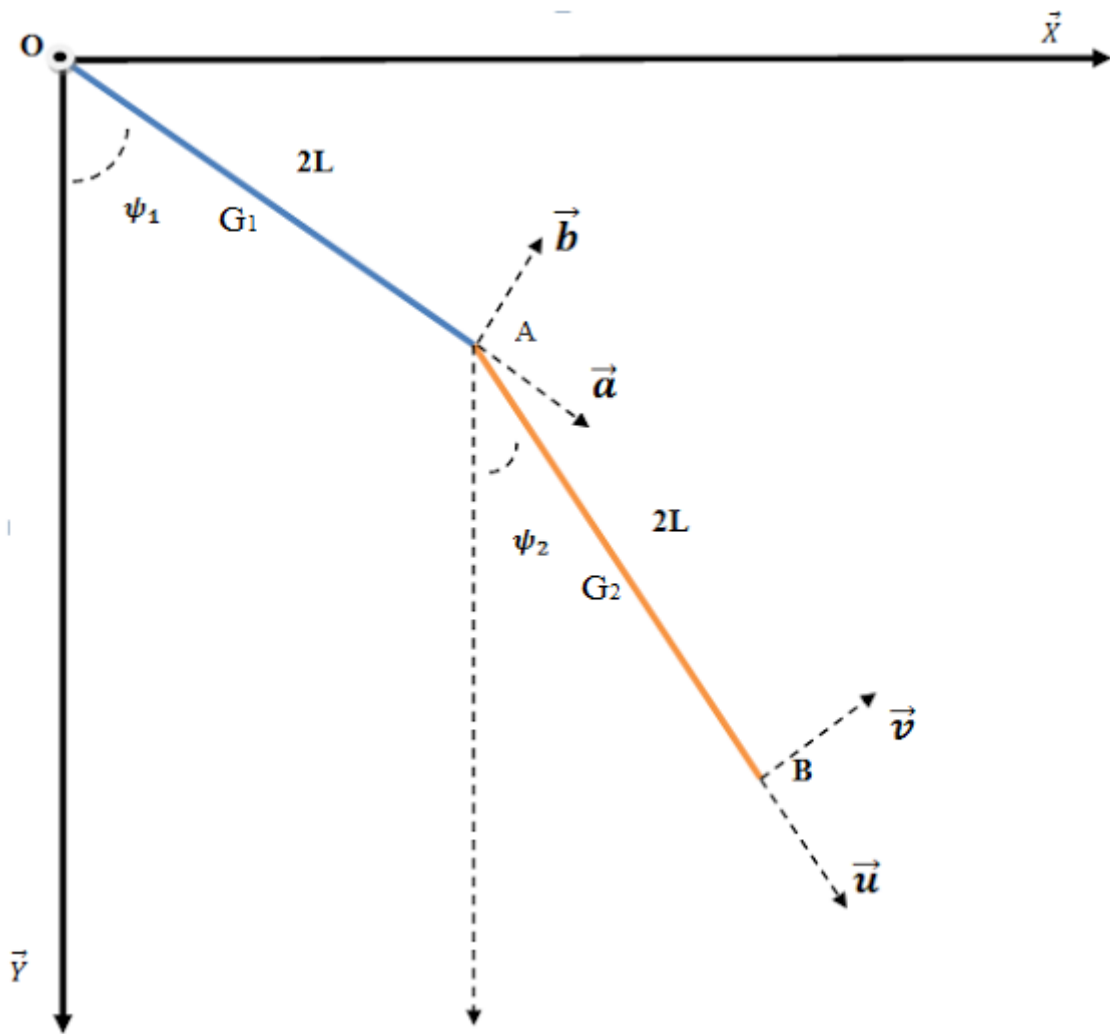


Figure 1 : Le pendule double.

I-1- Le paramétrage :

Le pendule double étant un système constitué de deux solides ; on a donc, à priori, douze paramètres primitifs. La prise en compte des liaisons permet de réduire le nombre de paramètres indépendants de ce système. Ces liaisons sont :

- ❖ Pour la tige (OA) :
 - ✓ Extrémité fixe en O de coordonnées connues dans le repère R
 - ✓ Le mouvement de la tige est plan (absence de nutation)
 - ✓ La tige est rectiligne (pas de rotation propre)

On n'a donc qu'un seul paramètre pour la tige (OA) ; c'est l'angle de précession ψ_1

Le vecteur rotation instantanée de la tige (OA) par rapport à R est : $\vec{\Omega}^{(OA/R)} = \dot{\psi}_1 \vec{z}$

❖ Pour la tige (AB) :

- ✓ Articulation en A de coordonnées cylindriques ($2L, \psi_1, 0$)
- ✓ Le mouvement est plan (absence de nutation)
- ✓ La tige est rectiligne (pas de rotation propre)

Le mouvement de la tige (AB) est donc un mouvement de précession, d'angle ψ_2 autour de son extrémité A qui a, dans le plan fixe $(O; \vec{x}, \vec{y})$, un mouvement circulaire de rayon $2L$ autour du point O.

Le vecteur rotation instantanée de la tige (AB) par rapport à R est : $\vec{\Omega}^{(AB/R)} = \dot{\psi}_2 \vec{z}$

Dans tout ce qui suit, toutes ces liaisons seront prises principales (paramétrage complet) ; le système (Σ) étudié a donc deux paramètres principaux : ψ_1 et ψ_2

I-2- Les efforts appliqués :

La réaction $\vec{R}_O$ s'exerçant en O sur la tige (OA) a une puissance virtuelle nulle puisque la liaison « O point fixe » est prise principale : $\vec{V}^* = 0$

□ Les efforts d'interaction des deux tiges au niveau de l'articulation en A :

L'articulation en A étant parfaite, les efforts correspondants ont une puissance virtuelle nulle pour tout champ de vitesses virtuelles compatible avec cette liaison.

□ Les efforts de pesanteur des deux tiges :

Les poids des deux tiges dérivent d'une énergie potentielle de pesanteur $U_{PES}(\Sigma/R)$ définie à une constante additive près par:

$$U_{PES}(\Sigma/R) = U_P(OA/R) + U_P(AB/R)$$

Soit :

$$U_{PES}(\Sigma/R) = -mg\overrightarrow{OG_1} - mg\overrightarrow{OG_2} + cste$$

On trouve :



Notons que le système est un système conservatif, puisque :

- ✓ Toutes les liaisons sont parfaites,
- ✓ Toutes les liaisons sont principales et indépendantes du temps
- ✓ Les seuls efforts, autres que les efforts de liaison, qui travaillent sont les efforts de pesanteur qui dérivent d'une énergie potentielle.

L'énergie mécanique du système par rapport à R est donc conservée au cours du mouvement

I-3-L'énergie cinétique par rapport à R :

Par additivité, l'énergie cinétique totale de système par rapport à R est donnée par :

$$T(\Sigma/R) = T(OA/R) + T(AB/R)$$

la tige (OA) ayant une point fixe O par rapport à R :

$$T(OA/R) = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\psi}_1^2$$

Pour la tige (AB), on utilise le théorème de Koenig :

$$T(AB/R) = \frac{1}{2} m(4l^2 \dot{\psi}_1^2 + l^2 \dot{\psi}_2^2 + 4l^2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\psi}_2^2$$

Soit finalement :



Cette expression de l'énergie cinétique de (S) par rapport à est bien quadratique par rapport aux dérivées des paramètres.

I-4-Les équations du mouvement :

Les N équations de Lagrange du mouvement d'un système (Σ) à N paramètres principaux, d'énergie cinétique T et d'énergie potentielle U_p rapport à un repère R, s'écrivent :

$$\text{pour } i = 1, \dots, n$$

Où les Q_i sont les composantes de forces généralisées s'exerçant sur (Σ) dans le repère R.

Pour le pendule double étudié, nous obtenons:

II

Les équilibres

II- Les équilibres:

On dit qu'un système matériel (Σ) ayant n degrés de liberté $q_1, \dots, q_n$, est en équilibre sous l'action de forces données par rapport à un repère R , si, abandonné sans vitesse initiale dans une position déterminée, il y reste indéfiniment. Cette position est dite alors position

Quelques critères de stabilité des équilibres des systèmes mécaniques

d'équilibre du système (Σ) dans le repère R, elle est caractérisée dans l'espace des configurations, par un vecteur position constant $\vec{q}^e = (q_1^e, \dots, q_n^e)$.

Il peut exister plusieurs positions d'équilibre pour un système comme il peut ne pas en exister.

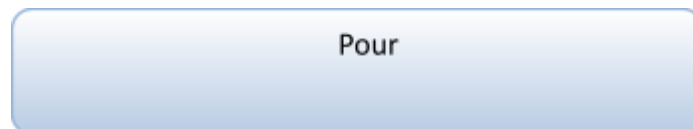
II-1-Cas général :

Les positions d'équilibre d'un système (Σ) sont les solutions constantes, lorsqu'elle existent, des équations du mouvement dans lesquelles, on fait :



II-2- Cas d'un système soumis à des liaisons parfaites Bilatérales, Holonomes et Indépendantes du temps :

Les positions d'équilibre sont les solutions constantes du système des équations:



Où $U_p(\Sigma)$ est l'énergie potentielle du système (Σ) et les Q_i sont les composantes de forces généralisées correspondants aux paramètres q_i issues de l'expression de la puissance virtuelle des forces actives connues.

Dans ce cas, lorsque la solution existe, elle est unique.

II-3-Cas d'un système soumis à des liaisons parfaites indépendantes du temps et où les forces autres que les forces de liaison dérivent d'une énergie potentielle :

Les positions d'équilibre sont solutions du système différent :



Elles correspondent donc lorsqu'elles existent à des extremums locaux pour l'énergie potentielle $U_p(\Sigma)$

II-4-Application :

Le pendule double étant un système conservatif, ses positions d'équilibre sont des extremums de son énergie potentielle. Cette énergie potentielle est donnée par :

$$U_p(\Sigma) = -3mgl \cos \psi_1 - mgl \cos \psi_2 + cste$$

Les positions d'équilibre sont donc solutions du système des équations suivant:

$$\left. \frac{\partial U_p}{\partial \psi_1} \right|_{\psi_1 = \psi_1^e} = 3mgl \sin \psi_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1^e = 0 \\ \psi_1^e = \pi \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial U_p}{\partial \psi_2} \right|_{\psi_2 = \psi_2^e} = mgl \sin \psi_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi_2^e = 0 \\ \psi_2^e = \pi \end{cases}$$

Le pendule double a donc quatre positions d'équilibre

au re



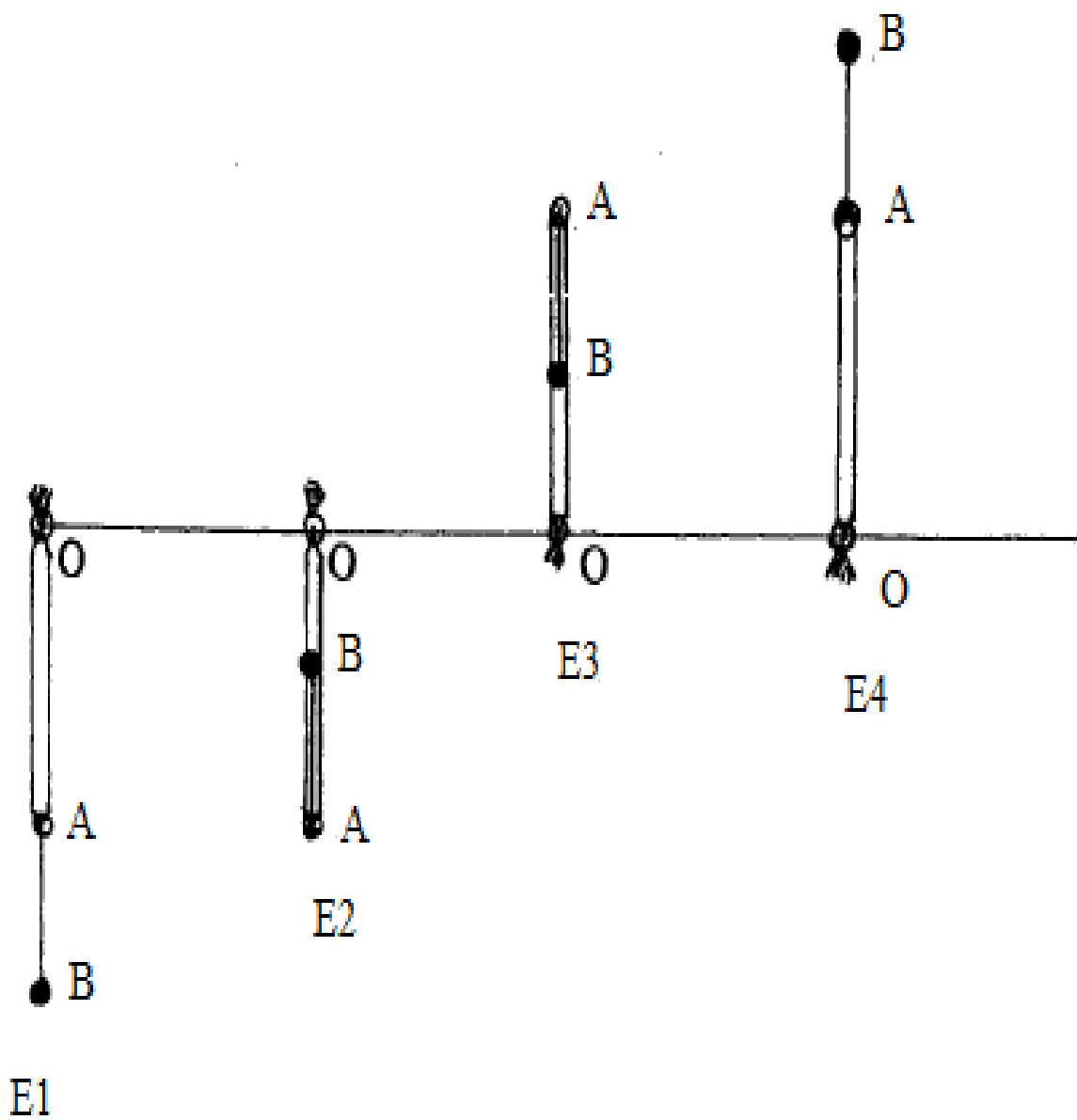


Figure 2 : Les différentes positions d'équilibre du système

III

Les critères de Stabilité

III- Les critères de Stabilité :

III-1- Définition de la stabilité d'une position d'équilibre:

Soit $\vec{q}^e = (q_1, \dots, q_n)$ une position d'équilibre du système (Σ) , on pose :

$$\|\vec{q} - \vec{q}^e\| = \sup |q_i - q_i^e| \quad \text{et} \quad \|\vec{\dot{q}}\| = \sup |\dot{q}_i| \quad i = 1, \dots, n$$

On dit que la position $\vec{q} = \vec{q}^e$ est une position "d'équilibre stable", si :

tel que et on ait : t,

Où $\vec{q}_0$ et $\vec{\dot{q}}_0$ sont les vecteurs positions et vitesse initiales du système (Σ) .

III-2- Stabilité asymptotique :

La position d'équilibre $\vec{q}^e$ est dite asymptotiquement stable si :

✓ $\vec{q}^e$ est une position d'équilibre stable.

✓ Pour toutes données initiales $\vec{q}_0$ et $\vec{\dot{q}}_0$, telles que :

et , on ait : Lim quand t tend vers l'infini.

III-3- Le théorème de LEJEUNE-DIRICHET :

Quelques critères de stabilité des équilibres des systèmes mécaniques

Enoncé :

Si une position d'équilibre d'un système conservatif (S) correspond à un minimum local strict pour l'énergie potentielle (Σ) .alors cette position d'équilibre est stable.

Ce théorème, qui permet d'étudier à priori la stabilité d'une position d'équilibre sans écrire les équations du mouvement du système étudié, constitue une condition suffisante mais non nécessaire de stabilité. Il ne s'applique qu'aux seuls systèmes mécaniques conservatifs et ne permet pas de conclure quand à la stabilité des maximums locaux stricts de l'énergie potentielle.

- Dans le cas d'un système conservatif à 2 degrés de liberté q_1 et q_2 , il s'agit de déterminer les minimums locaux de la fonction énergie potentielle $U_p(q_1, q_2)$ pour cela, on introduit la matrice Hessienne de l'énergie potentielle de (Σ) ; soit :

$$J(U_p(\Sigma)) = \left[\frac{\partial^2 U_p(\Sigma)}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad \text{pour } i=1, 2 \text{ et } j=1, 2$$

la position d'équilibre $\vec{q}^e$ sera stable si :

$$\det J(U_p(\Sigma)) \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr}[J(U_p(\Sigma))] \neq 0 \quad \text{pour} \quad \vec{q} = \vec{q}^e.$$

- Pour les vibrations d'un système à n degrés de liberté ; la stabilité de la position d'équilibre étudiée est assurée lorsque les valeurs propres de la matrice Hessienne J de l'énergie potentielle du système sont toutes à partie réelle négative. Ces valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $\det (J - \lambda I) = 0$

$$J(U_p(\Sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_1 \partial q_2} & \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_2^2} & \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} & \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \\ \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_n \partial q_1} & \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} & \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial q_n \partial q_n} \end{bmatrix}$$

Application : Le pendule double.

Le pendule double étant un système conservatif on peut appliquer le critère de LEJEUNE-DIRICHLET pour étudier la stabilité des quatre positions d'équilibre précédemment trouvées. La matrice Hessienne de l'énergie potentielle du système s'écrit sous la forme :

$$J(U_p(\Sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_p}{\partial \psi_1^2} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} \\ \frac{\partial^2 U_p}{\partial \psi_2 \partial \psi_1} & \frac{\partial^2 U_p}{\partial \psi_2^2} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\{ \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \quad \{$$

donc :

$$\text{Tr} [U_p(\Sigma)] = 3 m g l \cos \psi_1 + m g l \cos \psi_2$$

$$\text{et} \quad \det [U_p(\Sigma)] = 3 (m g l)^2 \cos \psi_1 \cdot \cos \psi_2$$

□ Pour la position d'équilibre : $E_1^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Tr[J(U_p(\Sigma))] = 4mgl \gg 0 \quad \text{et} \quad \det J(U_p(\Sigma)) = 3(mgl)^2 \gg 0$$

Donc $E_1^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une position d'équilibre stable.

□ Pour la position d'équilibre : $E_2^e = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

$$Tr[J(U_p(\Sigma))] = -4mgl \ll 0, \det J(U_p(\Sigma)) = 3(mgl)^2 \gg 0$$

Donc on ne peut pas conclure pour la stabilité de $E_2^e = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$.

□ Pour la position $E_3^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$:

$$Tr[J(U_p(\Sigma))] = 2mgl \gg 0, \det J(U_p(\Sigma)) = -3(mgl)^2 \ll 0$$

Donc on ne peut pas conclure pour la stabilité de $E_3^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$

□ Pour la position $E_4^e = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$Tr[J(U_p(\Sigma))] = -2mgl \ll 0, \det J(U_p(\Sigma)) = -3(mgl)^2 \ll 0$$

Donc on ne peut pas conclure pour la stabilité de $E_4^e = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

Le critère de LEJEUNE-DIRICHLET ne permet pas de conclure à la stabilité des positions d'équilibre qui correspondent à des maximums locaux stricts de l'énergie potentielle du système étudié. Il présente cependant un réel avantage puisque, lorsqu'on peut l'appliquer, il ne nécessite que la connaissance de l'énergie potentielle du système pour lequel on n'a pas besoin d'écrire les équations du mouvement.

III-4-Le critère de LYAPUNOV :

Ce critère s'applique à tous les systèmes qu'ils soient conservatifs ou non conservatifs. Il repose sur l'étude du signe des parties réelles des solutions de l'équation caractéristique du système des équations du mouvement de (Σ) linéarisées au voisinage de la position d'équilibre étudiée.

III-4-1- Linéarisation des équations de mouvement :

Soit $\vec{q}^e = (q_1^e, \dots, q_n^e)$ une position d'équilibre du système (Σ) . Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, on linéarise les équations du mouvement de (Σ) au voisinage de cette position d'équilibre. Pour cela, on pose :

$$\delta \vec{q}(t) = \vec{q}(t) - \vec{q}^e = (\delta q_1, \dots, \delta q_n) \quad \text{où} \quad \delta q_i = q_i - q_i^e, \quad \text{où } i = 1, \dots, n$$

Les équations du mouvement linéarisées se mettent alors sous la forme matricielle suivante :

$$M \ddot{\delta \vec{q}} + B \dot{\delta \vec{q}} + C \delta \vec{q} = \vec{0}$$

Où les $\delta q_i, \delta \dot{q}_i, \delta \ddot{q}_i$ sont des infiniments petits du premier ordre et les matrices A , B et C sont des matrices carrées ($n \times n$), constantes.

- ✓ La matrice A est une matrice symétrique, définie positive, appelée matrice des masses.
- ✓ La matrice B est une matrice quelconque, elle se décompose de manière unique en une partie symétrique B^S , et en une partie antisymétrique B^{AS} .

La partie symétrique, B^S , caractérise les efforts dissipatifs s'exerçant sur le système (Σ) . Ses coefficients sont appelés coefficients d'amortissement.

Lorsque le système (Σ) est conservatif, la matrice B est antisymétrique ($B^S = 0$), cette partie antisymétrique caractérise les efforts non dissipatifs ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

Si tous les efforts s'exerçant sur le système (Σ) dérivent d'une énergie potentielle, la matrice B est nulle.

- ✓ La matrice C est une matrice symétrique, caractérisant les efforts dérivant d'une énergie potentielle.

Les solutions du système linéarisé précédent sont recherchées sous la forme : $\delta \vec{q} = \vec{D} e^{rt}$ où $\vec{D}$ est un vecteur constant et r un nombre complexe.

On obtient alors un système linéaire homogène de n équations où les n inconnues sont les composantes $D_1, \dots, D_n$ du vecteur $\vec{D}$. Pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que son déterminant, fonction de r , soit nul. L'équation obtenue, appelée équation caractéristique du système, permet de déterminer les valeurs de r .

Cas d'un système (Σ) libre où toutes les liaisons sont indépendantes du temps.

Pour un système à n paramètres principaux le polynôme caractéristique du système des n équations linéarisées est un polynôme de degré $2n$ qui admet dans le corps de complexes $2n$ solutions complexes, soient :

$$r_i = \text{Re}(r_i) + j \text{Im}(r_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2n \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

III-4-2-Enoncé :

- ✓ Toutes à partie réelle négative donc la position d'équilibre étudiée est stable
- ✓ si une solution a une partie réelle positive donc la position est instable
- ✓ si une solution a une partie réelle nulle :
 - Soit cette solution est simple, donc on a la stabilité
 - Soit cette solution est multiple, donc on a l'instabilité

Application : Le pendule double.

$$\text{On pose } \varepsilon = \psi_1 - \psi_1^e, \quad \mu = \psi_2 - \psi_2^e, \quad \Omega_1^2 = \frac{9g}{16l} \quad \text{et} \quad \Omega_2^2 = \frac{3g}{4l}$$

Quelques critères de stabilité des équilibres des systèmes mécaniques

$$\{ \quad r \in C$$

□ Pour la position $E_2^e = \left(\frac{\pi}{\pi}\right)$:

Le système des équations linéarisées au voisinage de cette position d'équilibre s'écrit :

$$\{$$

Soit:
$$\{A[r^2 -] + Br^2 = 0 \quad Ar^2 + B[r^2 -] = 0$$

L'équation caractéristique de ce système est donc:

$$\frac{7}{16}r^4 - r^2[\Omega_1^2 + \Omega_2^2] + \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont :

$$\{$$

Les solutions ont une partie réelle positive donc E_2^e la position est instable.

□ Pour la position $E_3^e = \left(\frac{0}{\pi}\right)$:

Le système des équations linéarisées au voisinage de cette position d'équilibre s'écrit :

$$\{$$

Soit :
$$\{$$

L'équation caractéristique de ce système est donc:

$$\frac{7}{16}r^4 + r^2[\Omega_1^2 - \Omega_2^2] - \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont :

{

Deux solutions ont une partie réelle positive donc la position d'équilibre E_3^e est instable.

□ Pour la position $E_4^e = \left(\frac{\pi}{0}\right)$:

Le système des équations linéarisées au voisinage de cette position d'équilibre s'écrit

{

Soit :

{

L'équation caractéristique de ce système est donc:

$$\frac{7}{16}r^4 - r^2[\Omega_1^2 - \Omega_2^2] - \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont :

{

Deux solutions ont une partie réelle positive donc la position $E_4^e = \left(\frac{\pi}{0}\right)$ est instable.

III-6- Le critère de ROUTH-HURWITZ :

Parmi les divers critères algébriques couramment utilisés on peut aussi citer le critère de Routh-Hurwitz. Ce critère, applicable à tous les systèmes conservatifs ou non conservatifs, consiste à construire une table appelée tableau de Routh à partir des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation linéarisée au voisinage de la position d'équilibre étudiée.

Ce critère est plus avantageux et plus simple à appliquer que le critère de Lyapunov car il ne nécessite pas le calcul des racines du polynôme caractéristique pour conclure à la stabilité ou à l'instabilité d'une position d'équilibre. En effet, ce calcul devient problématique lorsqu'on étudie des systèmes ayant trois degrés de liberté ou plus. Pour un système à trois paramètres

principaux les polynômes caractéristiques obtenus au voisinage des positions d'équilibre sont des polynômes de degrés six.

□ Le Tableau de Routh :

Soit l'équation caractéristique de degré n à coefficients réels, représentant l'équation caractéristique du système des équations linéarisées au voisinage d'une position d'équilibre d'un système mécanique :

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

$$a_0 \neq 0$$

A partir des coefficients de l'équation caractéristique, on dresse le tableau suivant dit tableau de Routh :

a_0	a_2	a_4	a_6	
a_1	a_3	a_5	a_7	
$a_1 a_2 - a_0 a_3$	$a_1 a_4 - a_0 a_5$	$a_1 a_6 - a_0 a_7$		
$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5)$	$a_5(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1(a_1 a_6 - a_0 a_7)$			
.....				

On continue à remplir ainsi le tableau jusqu'à obtention de zéros à la fin de chaque colonne.

□ Enoncé du critère de Routh-Hurwitz :

- ✓ Pour que l'équation caractéristique considérée ait toutes ses racines à parties réelles négatives et donc pour que la position d'équilibre étudiée soit stable, il faut et il suffit que les éléments de la première colonne du tableau de Routh soient tous positifs.
- ✓ Si les éléments de la première colonne changent de signe le nombre de changement de signe est exactement égal au nombre de racines à parties réelles positives.
- ✓ changement de signe est exactement égal au nombre de racines à parties réelles positives.
- ✓ Si les éléments de la première colonne changent de signe le nombre de changement de signe est exactement égal au nombre de racines à parties réelles positives.

Remarque :

On peut multiplier ou diviser une ligne de la table de Routh par un nombre positif sans changer les propriétés de celle-ci.

□ Validité du critère de Routh :

Il arrive parfois que le critère de Routh tombe en défaut et ne permet pas de conclure quand à la stabilité ou non de la position d'équilibre étudiée .C'est le cas par exemple où le premier terme d'une ligne ou tous les termes d'une ligne du tableau de Routh sont nuls.

□ Applications :

Le pendule double est un système pour lequel on ne peut pas appliquer le critère de Routh–Hurwitz car au voisinage des positions d'équilibre les polynômes caractéristiques sont des polynômes bicarrés de degré quatre. Tous les coefficients de ces polynômes de rang impairs sont nuls ce qui conduit à la nullité de la seconde ligne des tableaux de Routh.

On se propose, dans ce qui suit d'établir à l'aide du critère de Routh-Hurwitz, les conditions pour lesquelles les tableaux de Routh des équations du second, du troisième et du quatrième degré ont tous leurs coefficients de la première colonne positifs. Lorsque ces équations correspondent à des polynômes caractéristiques obtenus au voisinage de positions et d'équilibre, leurs solutions seront toutes à partie réelle négative et ces positions d'équilibre seront stables. Nous donnerons, pour chaque cas, la forme générale de l'équation, le tableau de Routh correspondant et les conditions de stabilité.

- Pour une équation caractéristique du second degré :

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

a_0	a_2
a_1	0
$a_1 a_2$	0
0	

Les conditions de
stabilité sont :

- Pour une équation caractéristique du troisième degré :

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

a_0	a_2
a_1	a_3
$a_1 a_2 - a_0 a_3$	0
$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)$	0
0	

Les conditions de stabilité sont :

Donc tous les coefficients doivent être positifs et on outre on doit avoir la condition supplémentaire $a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) \neq 0$.

- Pour une équation caractéristique du quatrième degré :

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

a_0	a_2	a_4
a_1	a_3	0

$a_1 a_2 - a_0 a_3$	$a_1 a_4$	0
$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4$	0	0
$a_1 a_4[a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4]$	0	0
0	0	0

Les conditions de stabilité sont:

$$(**) \text{ et } (***) \Rightarrow a_4 \neq 0$$

De

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow a_3 \neq 0$$

Conclusion :

Au terme de ce travail, il convient d'en retracer les différentes étapes et d'en rappeler les principaux résultats. Nous avons, dans ce mémoire, passé en revue quelques critères de stabilité des positions d'équilibre des systèmes mécaniques en précisant à chaque fois leur énoncé, leur domaine de validité et leur conditions d'application.

Le critère de Lejeune-Dirichlet est simple d'application puisque sa mise en œuvre ne nécessite que la connaissance de l'énergie potentielle du système mécanique étudié sans avoir à établir ses équations du mouvement. Il n'est, cependant, applicable qu'aux seuls systèmes conservatifs et ne permet pas de conclure quand à la stabilité des positions d'équilibre correspondant à des maximums stricts de l'énergie potentielle.

Le critère de stabilité de Lyapunov s'applique à tous les systèmes, conservatifs ou non, mais nécessite l'établissement des équations du mouvement du système linéarisées au voisinage de la position d'équilibre étudiée. Il repose sur l'étude du signe des parties réelles des solutions du polynôme caractéristique du système des équations linéarisées. La détermination de ces solutions devient ardue lorsque le système mécanique étudié a trois ou plus degrés de liberté. Dans ce cas une étude du signe de valeurs propres est mieux adaptée.

Le critère de Routh-Hurwitz permet de contourner cette difficulté. Il n'est plus nécessaire de calculer les solutions du polynôme caractéristique. Il suffit de dresser, à partir de coefficients de ce polynôme le tableau de Routh et d'étudier le signe des éléments de sa première colonne. Signalons que ce critère n'est plus valable lorsque tous les éléments d'une même ligne de ce tableau sont nuls.

Nous avons choisi, en guise d'exemple d'application, le système mécanique constitué d'un pendule double formé de deux tiges rectilignes identiques articulées parfaitement et se mouvant dans le champ de pesanteur. Il s'agit d'un système conservatif à deux paramètres principaux.

L'étude de la stabilité des positions d'équilibre d'un système mécanique n'étant qu'une des étapes de l'étude de ses éventuelles vibrations, il convient donc de choisir à chaque fois judicieusement le critère de stabilité le mieux adapté et le plus facile d'application.

Référence :

Bibliographie :

- [1] JEAN PIERRE BROSARD , INSA de Lyon [1994]
- [2] GAMAL ZAGWAGH,et MOHAMMED KERROUM ,Mécanique analytique
- [3] Thèse présentée à l'université ABOU-BAKR BELKAID par Mr CHIKHAOUI Abdelhak
/Relation entre la Dérivée optimale et la stabilité Asymptotique ,2009

Webliographie :

- <http://www.polytech-lille.fr/cours-regulation-automatique/dy3641.htm>
- <http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/auto/didacticiel/notions/routh.htm>
- <http://www-hadoc.lag.ensieg.inpg.fr/hadoc/continu/n09/r09-05.htm>