الموضوع الأول

(التمرين الأول: (05 نقاط

I) نعتبر المعادلة $(E) : (x+1)^2 - 7y = 4$ ذات المجهولين الصحيحين x و y.

1. أ- بيّن أنه إذا كانت $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 1 [7]$ أو $x \equiv 4 [7]$.
   ب- حل المعادلة (E).
2. جد كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $\begin{cases} x \equiv 4 [7] \\ PGCD(x; y) = 3 \end{cases}$
3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{121}$ في نظام التعداد ذي الأساس α، ويكتب $\overline{74}$ في نظام التعداد ذي الأساس β.
   - عين أصغر قيمة ممكنة للعددين α و β بحيث $PGCD(\alpha; \beta) = 3$ و $\alpha \equiv 4 [7]$.

II) (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماً أساسها r، حدودها أعداد طبيعية بحيث: $\begin{cases} u_1 + u_9 = 56 \\ PGCD(u_1; u_9) = 8 \end{cases}$

1. عين كل الثنائيات $(u_1; u_9)$ التي تحقق الشروط السابقة، ثم استنتج القيم الممكنة للأساس r.
2. في كل مما يلي نضع $r > 3$.
   أ- استنتج قيمة كل من u_1 و u_9.
   ب- احسب u_n، ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   - عين قيم n التي من أجلها يكون S_n مضاعفاً للعدد 7.

(التمرين الثاني: (04 نقاط

يراد عشوائياً تشكيل لجنة تضم رئيس ونائب وكاتب له من بين أربعة رجال H_1, H_2, H_3, H_4 وثلاثة نساء F_1, F_2, F_3.

1. أوجد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها.
2. نعتبر الأحداث التالية:
   A: "اللجنة من نفس الجنس"
   B: "هو النائب H_1"
   C: "اللجنة تضم رئيس ذكر وكاتب امرأة"
   D: "معاً F_1 و H_1 اللجنة لا تضم كلاً من"
   أ- احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(\bar{A})$.
   ب- احسب $P(C)$ و $P(B)$، ثم بيّن أن $P(D) = \frac{6}{7}$.
3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد النساء في اللجنة.
   أ- عين قيم المتغير العشوائي X ثم قانون احتمال المتغير العشوائي X.
   ب- احسب احتمال الحادثة $X + 1 = 2^X$.

(التمرين الثالث: (04 نقاط

1. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $(E) : Z^2 - 4(\cos \theta)Z + 4 = 0$ حيث θ وسيط حقيقي.
   ب- من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$ نرمز إلى حلي المعادلة بـ Z_1 و Z_2. أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

2. نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = \sqrt{3} + i$ ، $Z_B = \sqrt{3} - i$ و $Z_C = 3\sqrt{3} + i$.
- أكتب العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC.
3. S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى C.
- عين النسبة وزاوية للتشابه S، ثم استنتج عبارته المركبة.
4. T_n التحويل النقطي حيث $n \ge 2$ نُعرف من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $T_n = S \circ S \circ ... \circ S$ (n مرة).
- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون التحويل T_n تحاكياً، ثم عيّن عناصره المميزة.

(التمرين الرابع: (07 نقاط

I) p و q الدالتان المعرفتان على $]0; +\infty[$ بـ:
$p(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)$ و $q(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ln(x+1)$
$(C_1), (C_2)$ التمثيلان البيانيان للدالتين q و p على الترتيب.
1. بقراءة بيانية، حدد إشارة كل من $q(x)$ و $p(x)$.
2. أ) تحقق أنه من أجل كل $x > 0$: $x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(x+1) \le x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
ب- استنتج أن: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

II) g الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & ; x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ g(0) = 1 \end{cases}$
1. أ- أدرس استمرارية الدالة g عند 0.
ب- بيّن أن الدالة g تقبل الاشتقاق عند 0 ثم حدد قيمة $g'(0)$.
2. أحسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to -1} g(x)$.
3. بين أنه من أجل $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$
4. علماً أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $(x+1)\ln(x+1) \le x$
- استنتج اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.
5. الدالة المعرفة على $D_f =]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = g(\frac{1}{x}) = x \ln(\frac{x+1}{x}) & ; x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
6. أ- أحسب $f'(x)$ متزايدة تماماً على D_f ثم تحقق أن الدالة f.
ب- شكل جدول تغيرات الدالة f.
ج- أنشئ التمثيل البياني (C_f).

III) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$ كما يلي: $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ و $v_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$: $f(n) < 1 < h(n)$ ثم استنتج أن $u_n < e < v_n$.
2. احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ ثم استنتج أن: $1 < \frac{e}{u_n} < 1 + \frac{e}{n}$.
3. بيّن أن المتتاليتان (v_n) و (u_n) متجاورتان.