

ANNEE 1999

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE VAIR

CONCOURS PC

**COMPOSITION DE
SCIENCES PHYSIQUES / CHIMIE**

Durée: 4 heures
Coefficient: 14

L'attention des candidats est attirée sur le fait
que la notation tiendra compte du soin et de la
rigueur apportés dans le travail.

PHYSIQUE

Partie I: Thermodynamique - transferts thermiques

I-1 Résistance thermique et isolation.

On considère un solide, conducteur de la chaleur, pour lequel on notera λ le coefficient de conductivité thermique.

(a) Rappeler la loi de Fourier reliant T et $\vec{j}_{cd}$, vecteur flux surfacique thermique par conduction. Préciser l'unité en système international de j_{cd} et λ .

(b) On se place, en régime stationnaire, dans un cas unidirectionnel où $T = T(x)$: le milieu conducteur est une tige cylindrique de section S de longueur e et dont les extrémités sont maintenues aux températures $T_1 = T(0)$ et $T_2 = T(e)$ (avec $T_1 > T_2$). La conductivité λ est constante.

1. Donner $T(x)$ en fonction de T_1 , T_2 , e et x .
2. Exprimer le flux thermique Φ traversant une section S .
3. Exprimer la résistance thermique définie par $(T_1 - T_2) = R_{th}\Phi$. Préciser l'unité de R_{th} .

(c) Applications numériques.

1. On considère une paroi vitrée formée d'un verre d'épaisseur $e = 4$ mm pour une hauteur $H = 1,5$ m et une largeur $L = 3$ m.

Donner R_{th} et le flux thermique Φ si $T_1 = T_i = 20^\circ\text{C}$ et $T_2 = T_e = -10^\circ\text{C}$. On prendra $\lambda = \lambda_v = 0,78 \text{ U.S.I.}$

2. On suppose que la baie vitrée est maintenant constituée de deux verres de même épaisseur $e = 4$ mm, emprisonnant une couche d'air d'épaisseur $e_{air} = 8$ mm. On donne $\lambda_{air} = 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ U.S.I.}$ Les températures T_1 et T_2 ont les valeurs précédentes du 1..

Donner la nouvelle résistance thermique R'_{th} et le nouveau flux Φ' . Conclusion ?

I-2 Cas non stationnaire.

La pièce comportant la baie vitrée a la capacité thermique C . On suppose que les seuls transferts thermiques avec l'extérieur se font par la baie vitrée (isolation "parfaite" du reste de la pièce). Une source de chaleur fournit la puissance P , assurant une température stationnaire T_i à la pièce.

(a) Exprimer P en fonction de ce qui précède.

(b) A $t = 0$, on coupe le chauffage, la température T de la pièce évolue en fonction du temps : $T = T(t)$ (avec $T(0) = T_i$). On supposera que pendant le temps dt , on peut appliquer, à la baie vitrée pour le transfert thermique, les résultats du régime stationnaire.

1. Donner l'équation différentielle en T en fonction de R_{th} et C .
2. Exprimer la solution en T et montrer qu'il est possible de définir une constante de temps τ , caractéristique de l'évolution de T .
3. Préciser la valeur limite théorique de T . Quel serait l'analogie électrique de ce phénomène ?

(c) Exprimer $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ rapport des constantes de temps associées au simple vitrage et au double vitrage.
Conclusion ? On comparera par exemple les temps nécessaires t_1 et t_2 pour que la chute de température soit égale à une chute de température donnée compatible avec l'évolution de T .

I-3 Modélisation approchée d'une isolation.

L'analyse précédente du I-1 s'avère trop sommaire : outre les transferts conductifs précédents (indice CD), il existe des processus conducto-convectifs à l'interface vitre-air (indice CC) et des processus radiatifs (exposant R).

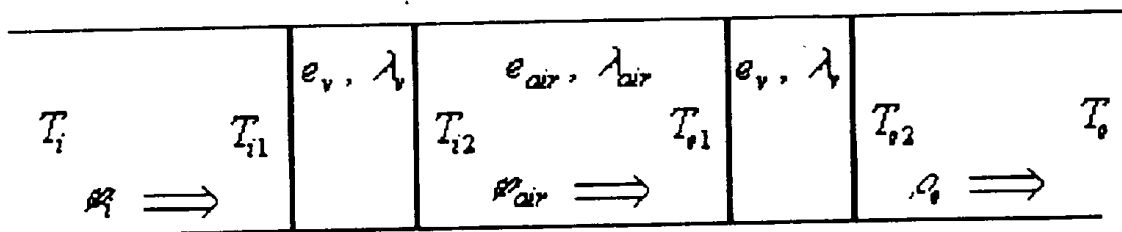
A l'extérieur, en présence de vent (indice v), il s'agira ainsi de convection forcé (indice CF) et à l'intérieur, sans vent il s'agira de convection naturelle (indice CN). Dans le cas du double vitrage, on néglige les transferts conducto-convectifs pour l'air entre les deux vitres.

Dans le cas unidirectionnel selon Ox , le vecteur flux surfacique d'énergie est $\vec{j} = \phi \vec{u}_x$ avec ϕ flux surfacique d'énergie (conductif, conducto-convectif ou de rayonnement).

- (a) Montrer comment la conduction permet d'interpréter l'expression relative au flux surfacique d'énergie conducto-convectif entre un solide à la température T_s et un fluide à la température T_f (unité de h à préciser) : $\phi_{cc} = h(T_s - T_f)$.

NOTATIONS:

$e_v = 4 \text{ mm}$; $\lambda_v = 0,78 \text{ U.S.I.}$; $e_{air} = 8 \text{ mm}$; $\lambda_{air} = 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ U.S.I.}$; $T_i = 20^\circ\text{C}$ et $T_e = -10^\circ\text{C}$



Avec pour les températures: T_i (intérieur), T_{i1} (1ère interface du 1^{er} verre [verre intérieur]), T_{i2} (2^{de} interface du 1^{er} verre), T_{e1} (1ère interface du 2nd verre [verre extérieur]), T_{e2} (2^{nde} interface du 2nd verre)

$\phi_i = h_i(T_i - T_{i1})$ avec $h_i = h_{CN} + h_i^R$ en U.S.I. $h_{CN} = 3,7$ $h_i^R = 5,4$

$\phi_{air} = \phi_{CD} + \phi^R$ avec $\phi^R = h^R(T_{i2} - T_{e1})$ en U.S.I. $h^R = 4,7$

$\phi_e = h_e(T_e - T_{e2})$ avec $h_e = h_{CF} + h_e^R$ en U.S.I. $h_{CF} = 15,9$ $h_e^R = 4,1$

(b) Exprimer en régime stationnaire le flux d'énergie Φ en fonction des différences de températures successives.

(c) Montrer que la résistance thermique équivalente peut s'écrire sous la forme

$$R_{th,eq} = \frac{1}{S} \sum \left[\frac{1}{x_i} \right]$$

(d) Application numérique : déterminer les températures intermédiaires T_{i1} , T_{i2} , T_{e1} , T_{e2} , et le flux d'énergie Φ .

(e) Les coefficients h_i^R et h_e^R liés aux transferts radiatifs, dépendent en fait des températures intermédiaires. (C'est la raison pour laquelle on sépare les termes conducto-convectifs et les termes radiatifs).

Proposer une méthode itérative permettant la détermination de ces températures intermédiaires pour une précision donnée.

Partie II : Mécanique - ondes progressives sur un pont suspendu

Etude d'un pont suspendu en l'absence de vent

II-1 Un point matériel M de masse m placée dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ est accroché à un câble inextensible vertical sans masse MA (voir la figure 1).

Quelle force $\vec{F} = F\vec{u}_y$ doit exercer un opérateur en A, pour que la masse se déplace avec l'accélération $\vec{a} = a\vec{u}_y$, (avec $-g < a$). Préciser la force $\vec{F}' = F'\vec{u}_y$ exercée par le câble sur l'opérateur.

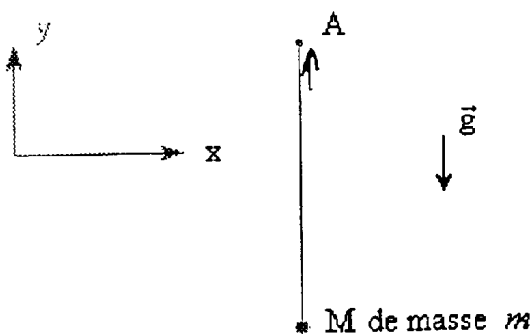


figure 1

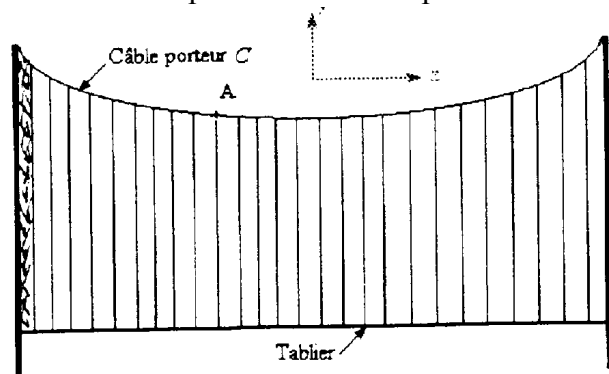


figure 2

II-2 On considère un pont suspendu, formé d'un câble porteur inextensible C, soutenant le tablier du pont par l'intermédiaire de câbles verticaux. (voir la figure 2). On négligera le poids du câble porteur et on supposera pour simplifier que le poids du tablier est uniformément réparti par l'intermédiaire d'une distribution **continue** de câbles verticaux. On envisage l'équilibre d'une portion de câble C, celle correspondant aux abscisses x et x + dx.

On rappelle que la tension T d'un câble au point A correspond à la norme de la force qu'il faut exercer selon la tangente en A , pour le maintenir dans son état, si on le coupait en A .

On adoptera les notations suivantes dans son état pour cet élément A de câble

- $T(x,t)$ tension au point d'abscisses x , à l'instant t .

- $\theta(x, t) = (\overset{\curvearrowright}{u}_x, \overset{\curvearrowright}{u}_{\tan x})$ avec $\overset{\curvearrowright}{u}_{\tan x}$ vecteur unitaire tangent au câble en x .

- $T(x + dx, t)$ tension au point d'abscisse $x + dx$, à l'instant t

- $\theta(x+dx, t) = (\overset{\curvearrowright}{u}_x, \overset{\curvearrowright}{u}_{\tan x+dx})$ avec $\overset{\curvearrowright}{u}_{\tan x+dx}$ vecteur unitaire tangent au câble en $x+dx$.

- la masse du tablier par unité de longueur est μ .

- $\delta F'_y = \delta F'_y u_y$ force exercée par les câbles verticaux accrochés à la position x , $x + dx$ de C et à la portion de tablier de longueur dx .
- A a pour ordonnée $y_A = y(x, t)$ et la portion de tablier "en dessous" a pour ordonnée $z_t = z(x, t)$.

- (a) Exprimer $\delta F'_y$, projection sur Oy de la force élémentaire "exercée" par le câble vertical $(x, x + dx)$ sur C, en utilisant les résultats de la question II-1.
- (b) La masse du câble C est négligée. L'élément de câble est donc sans masse. Quelle relation cela implique-t-il sur les forces exercées sur cette portion du câble. On précisera les forces élémentaires exercées sur cet élément de câble.
- (c) La relation précédente projetée sur Ox et Oy conduit à deux relations faisant intervenir des dérivées partielles. Montrer que l'une de ces relations permet d'obtenir $T(x, t)$ en fonction de θ et $T(0, t) = T_0(t) = T_0$.
- (d) Montrer que l'autre relation conduit à l'équation en y et z

$$(1) T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu g + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

II-3 Cas stationnaire.

On se place dans le cas simple du tablier horizontal et immobile. Le câble porteur est

accroché en $x = \pm \frac{L}{2}$, points d'ordonnées nulles. On pose $T_0 = T_{eq}$ (indépendant de t).

- (a) Donner l'expression de $y = Y(x)$ de la courbe prise par le câble porteur (en pratique les longueurs des câbles verticaux sont calculées pour que, lorsque $y = Y(x)$, le tablier soit horizontal).
- (b) On définit la flèche f comme la différence d'altitude entre le point le plus haut du câble et le point le plus bas.
Donner la flèche en fonction de T_{eq} , et écrire l'expression de $Y(x)$ en fonction de f , L et x .

II-4 Cas non stationnaire.

Le tablier n'est plus horizontal et immobile, il peut se déformer $z = z(x, t)$. On suppose que les câbles reliant C au tablier restent toujours tendus.

- (a) Montrer que l'équation différentielle (1) peut s'écrire uniquement à l'aide de la variable $y = y(x, t)$.
- (b) On pose $T_0 = T_{eq} + \eta(t)$ et $y(x, t) = Y(x) + \xi(x, t)$ (avec T_{eq} et $Y(x)$ défini à la question II-3).

Ecrire la nouvelle équation différentielle en ξ et η après simplification.

II-5 Dans le cas très simplifié de $\eta \approx 0$ montrer qu'il peut alors se propager des ondes progressives appelées "ondes de pont". On exprimera la célérité c de ces ondes.

Application numérique pour le pont de Tacoma, aux Etats-Unis: $L = 855\text{m}$ et $f = 70\text{ m}$.

Donner c et le temps d'un aller et retour sur le pont pour une telle onde.

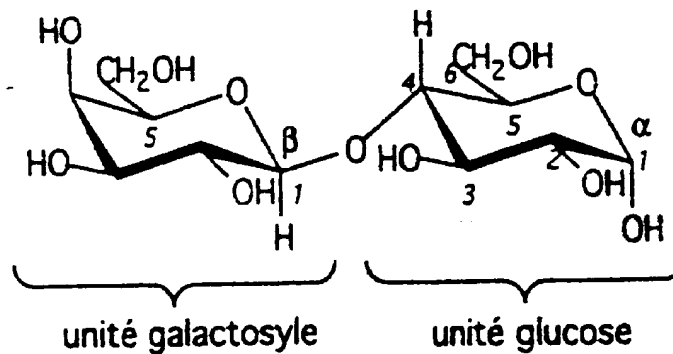
CHIMIE

Partie III : Etude de quelques constituants d'un lait

Le lait est une substance très complexe, comportant un grand nombre d'espèces moléculaires différentes.

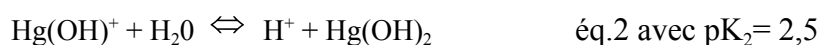
III-1 Détermination de la teneur en lactose par polarimétrie.

- (a) Parmi ces constituants figurent des glucides: le principal sucre du lait est le lactose, disaccharide naturel dont une représentation semi-développée est donnée par le schéma:



Donner la configuration des carbones 5 et 1 de l'unité galactose et du carbone 1 de l'unité glucose.

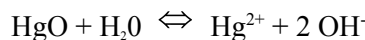
- (b) Grâce aux enzymes de nombreuses bactéries, le lactose se transforme en acide lactique (ou acide 2 hydroxypropaneoïque).
- (1) Comment appelle-t-on le rôle joué par ces enzymes ?
 - (2) Donner la formule semi-développée de l'acide lactique. La molécule d'acide lactique est-elle chirale ? Une solution d'acide lactique possède-t-elle toujours une activité optique ?
- (c) Une solution de nitrate mercurique ajouté à du lait conduit à la précipitation des protéines du lait. On supposera qu'après précipitation de ces protéines, la phase liquide (lactosérum) ne contient comme molécule chirale que le lactose.
- (1) A quelle condition, la mesure du pouvoir rotatoire du lactosérum permet-elle d'accéder à la concentration en lactose de ce lait ?
 - (2) Si on ajoutait directement de l'acide nitrique au lait, outre la précipitation des protéines, il se produirait une hydrolyse non totale du lactose en glucose et galactose. Quel inconvénient serait lié à cette réaction dans une expérience de polarimétrie ?
- (d) En solution le mercure au nombre d'oxydation 2, Hg(II) , peut se trouver à l'état d'ion Hg^{2+} ou de complexes, Hg(OH)^+ et Hg(OH)_2



- (1) Porter sur un axe, en fonction du pH, l'espèce majoritaire pour l'équilibre 1.
- (2) De même sur un autre axe, porter l'espèce majoritaire relative à l'équilibre 2.

- (3) Montrer que la superposition de ces deux diagrammes, conduit à ne considérer que deux espèces pour Hg(II). On donnera la valeur K de l'équilibre entre ces deux espèces.

L'oxyde mercurique HgO peut se dissoudre. On donne le produit de solubilité K_{s1} avec $pK_{s1} = 25,4$, relatif à la réaction conduisant à Hg^{2+} :



- (4) Donner le produit de solubilité K_{s2} de l'oxyde mercurique conduisant au complexe $Hg(OH)_2$.
- (5) Donner l'expression littérale de la solubilité s de l'oxyde mercurique en fonction de pH, pK_{s1} , et pK_{s2} . Tracer le graphe $s = s(pH)$.
- (6) Quel est le rôle de l'ajout d'acide nitrique à cet oxyde, pour obtenir la solution de nitrate mercurique ?
- (e) On rappelle la loi de Biot pour une solution douée d'activité optique : $\alpha = [\alpha]$. L.c avec pour le lactose, $[\alpha] = 52,42^\circ \cdot dm^{-1} \cdot g^{-1} \cdot cm^3$ pouvoir rotatoire, L chemin optique en dm et c concentration massique en $g \cdot cm^{-3}$.

- (1) Que représente α et L ? Décrire sommairement le principe d'une mesure polarimétrique. Quel appareil peut-on utiliser pour améliorer la mesure ?

- (2) Comment peut-on séparer le lactosérum du précipité ?

- (f) On verse dans deux fioles (fiole [1] de $50 cm^3$ et fiole [2] de $100 cm^3$) $2,5 cm^3$ de la solution nitrique et $25 cm^3$ de lait. On complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge et on agite les fioles ce qui conduit à l'apparition d'un précipité et à une phase aqueuse (lactosérum).

Résultat : pour une cuve de 25 cm de chemin optique, on obtient les résultats correspondant aux deux fioles: $\alpha_1 = 3,13^\circ$ et $\alpha_2 = 1,54^\circ$

- (1) On note m la masse de lactose et v le volume en cm^3 de précipité pour les $25 cm^3$ de lait. Exprimer de façon littérale α_1 et α_2 en fonction des grandeurs précédemment définies.

- (2) Montrer que ces mesures permettent de déterminer la teneur en lactose du lait considéré, teneur qu'on exprimera en $g \cdot l^{-1}$. Ces mesures concordent-elles avec le fait qu'un lait de vache contient en général de 44 à 55 $g \cdot l^{-1}$ de lactose ?

III-2 Dosage phmétrique d'un lait

Le lait présente une acidité due principalement à l'acide lactique, acide qui peut être dosé par de la soude : on dose $50 cm^3$ de lait par la soude $0,1 mol \cdot l^{-1}$. On relève les valeurs suivantes de pH, pour différentes valeurs de V , volume de soude versé:

V en cm^3	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	6,5	7,0
pH	6,55	6,68	6,80	6,94	7,09	7,26	7,44	7,54	7,65

V en cm ³	7,8	7,7	8,0	8,2	8,5	8,7	9,0	9,3	9,5
pH	7,79	7,83	7,93	7,97	8,06	8,13	8,22	8,33	8,38

V en cm ³	9,8	10,0	10,2	10,5	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0
pH	8,48	8,52	8,57	8,69	8,83	9,10	9,32	9,51	9,66

V en cm ³	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0
pH	9,82	9,93	10,05	10,13	10,21	10,30	10,35	10,42	10,48

- (a) Tracer avec les unités $1\text{ cm} \leftrightarrow 1\text{ unité } pH$ et $1\text{ cm} \leftrightarrow 1\text{ cm}^3$, la courbe $pH = f(v)$ et déterminer par la méthode des tangentes les coordonnées du point d'équivalence.
- (b) Donner la concentration en acide lactique en mol. l⁻¹ et en g. l⁻¹.
- (c) Le pK_A de l'acide lactique est de 3,18. Est ce bien l'acide lactique qui a été dosé ?

Partie IV : Synthèse organique

IV-1 Ecrire la formule développée du composé **A**, DDT ou 2,2-di(parachlorophényl)- 1, 1, 1 - trichloroéthane et du composé **B**, chloral ou 1,1,1-trichloroéthanal.

IV-2 On envisage la transformation en milieu acide du chloral : de quelle nature est l'entité obtenue **C** (électrophile, nucléophile, ...)

IV-3 Ecrire l'équation bilan du chlorobenzène sur **C** donnant le composé **D** et préciser le type de cette réaction. Pourquoi la formation du dérivé chloré en position para est-elle favorisée ?

IV-4 En milieu acide, **D** conduit à un carbocation **E**. Ecrire l'équation bilan correspondante.

IV-5 Montrer qu'il est ainsi possible de réaliser la synthèse du DDT à partir du chloral et du chlorobenzène.

IV-6 A quoi sert le DDT ?