

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire no 86-228 du 28 juillet 1986.

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras.

A. MODULATION ET DEMODULATION SPATIALES EN OPTIQUE

En électronique, la modulation temporelle d'un signal et sa démodulation sont des techniques importantes et connues dans le domaine de la transmission des informations par voie hertzienne.

Ces techniques peuvent être transposées aux variations spatiales d'un signal, en optique.

1. Interférence de deux ondes monochromatiques, planes

On réalise, dans l'air, l'interférence de deux ondes monochromatiques, planes, cohérentes, de même amplitude A_0 et de même phase nulle en O (Figure A1) ; la première, de direction Oz, tombe normalement sur un écran d'observation Oxy et la seconde fait l'angle $\theta_0 = 3^\circ$ avec la direction de la première. La longueur d'onde commune est $\lambda = 632,8 \text{ nm}$.

a) Ecrire les expressions des amplitudes complexes $\underline{\psi}_1$ et $\underline{\psi}_2$ des deux ondes en un point P du plan Oxy.

b) En déduire la répartition de l'éclairement dans ce plan, la géométrie des franges d'interférence et la valeur de l'interfrange en fonction de λ et de θ . Calculer l'interfrange en microns.

c) Sous quel angle, en minute d'arc, un observateur voit-il une distance égale à l'interfrange, lorsqu'il est placé à une distance de 25 cm du plan Oxy ? Commenter.

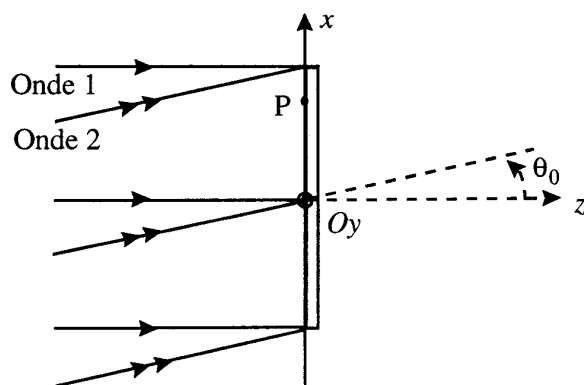


Figure A.1

2. Réseau sinusoïdal d'amplitude

a) La répartition de l'éclairement $I(P)$ dans le plan Oxy, calculé à la question A.1.b, peut se mettre sous la forme :

$$I(x) = \frac{I(0)}{2} [1 + \cos(2\pi u_0 x)]$$

Il est possible d'obtenir, à partir de cet éclairement, une plaque photographique de transmittance :

$t(x) = \frac{1 + \cos(2\pi u_0 x)}{2}$ pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ $t(x)$ avec $l = 2 \text{ mm}$. On réalise ainsi un réseau sinusoïdal par transmission. Trouver u_0 en fonction de λ et θ_0 ? Comparer les valeurs de u_0 et de $u_1 = 1/l$ en unité SI.

b) On appelle spectre spatial de $t(x)$, noté $\hat{t}(u)$ et lu « t chapeau de u », la quantité suivante :

$$\hat{t}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp(-i2\pi ux) dx$$

Montrer que $\hat{t}(u)$ se met sous la forme suivante : $\hat{t}(u) = \alpha_0 \hat{t}_1(u) + \alpha_1 \hat{t}_1(u - u_0) + \alpha_{-1} \hat{t}_1(u + u_0)$

Où $\hat{t}_1(u) = \frac{\sin(\pi ul)}{\pi ul}$ et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{-1}$ trois coefficients à déterminer en fonction de l .

c) On éclaire le réseau sous incidence normale, avec une onde monochromatique plane, et on étudie la diffraction à l'infini dans la direction faisant un angle θ faible avec l'axe Oz.

Représenter graphiquement la répartition de l'éclairement en fonction de $u = \theta / \lambda$.

Comparer la figure de diffraction donnée par ce réseau à celle produite par un réseau de fentes infiniment fines.

3. Fonction de transfert d'une lentille en éclairage cohérent

Dans le montage optique de la figure A.2, on forme l'image d'un objet transparent, unidimensionnel (selon Ox), à l'aide d'une lentille mince convergente L, de distance focale image $f = 20\text{cm}$. Cette lentille est limitée, suivant une direction parallèle à l'axe des x, par une fente rectangulaire, de largeur D, centrée sur l'axe optique Oz. L'éclairage est cohérent : l'onde qui éclaire l'objet a une longueur d'onde déterminée $\lambda = 632,8\text{ nm}$ et son vecteur d'onde une valeur et une direction fixées ; dans ce montage, cette direction est normale au plan de l'objet, car l'onde incidente est issue d'une source ponctuelle S, placée au foyer principal objet d'une lentille collimatrice L_c , mince, convergente, de distance focale image $f_c = 10\text{ cm}$.

Dans tout le problème, on suppose satisfaite l'approximation de Gauss de l'optique géométrique.

L'objet est le réseau sinusoïdal précédent, de largeur totale l et de transmittance $t(x)$.

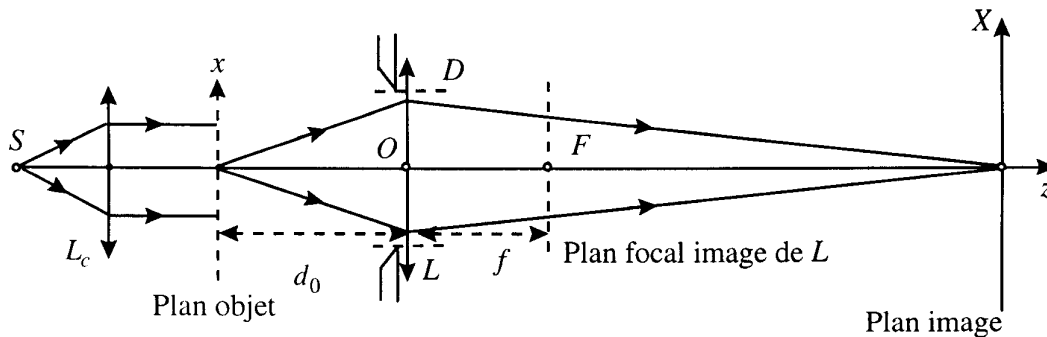


Figure A.2

a) Trouver la position de l'image géométrique donnée par L, lorsque l'objet est situé en avant de L, à une distance $d_0 = 25\text{ cm}$ et calculer le grandissement transversal. Construire, à l'échelle 1 / 10 sur l'axe d'optique, l'image géométrique de l'objet. Où se trouve l'image géométrique de la source S donnée par l'ensemble des deux lentilles L_c et L ?

b) L'onde incidente est diffractée à l'infini par le réseau dans la direction faisant un angle θ faible avec l'axe Oz. Montrer que la répartition de l'amplitude complexe de cette onde diffractée, dans le plan focal image de L, est donnée par $\hat{t}(u)$ avec $u = \theta / \lambda$.

c) Lorsque la largeur D est inférieure à une certaine valeur à déterminer, on n'observe pas dans le plan image la structure périodique du réseau sinusoïdal. Donner une interprétation. En déduire que la lentille diaphragmée se comporte comme un filtre passe-bas dont on donnera la fonction de transfert $T(u)$. Calculer en m^{-1} la fréquence spatiale de coupure u_c dans le cas où $D = 10\text{ cm}$.

d) Décrire l'aspect du plan focal si $u_c > 1,5 u_0$ (couleur, position des pics d'intensité).

4. Modulation et démodulation spatiales en amplitude

Dans le montage précédent (Figure A.2), on accole au réseau précédent un objet transparent dont la transmittance est $m(x)$, x étant la variable spatiale le long de l'axe Ox.

a) Montrer qu'on réalise ainsi simplement un « multiplieur optique ».

b) On constate, dans le plan focal, que les pics d'intensité s'élargissent. Ainsi, le pic central s'étend jusqu'à une distance égale à $b = 2\text{mm}$ de l'axe optique. Justifier cet élargissement en s'aidant de l'étude qualitative des réseaux de fentes. Calculer la valeur de la fréquence spatiale u_m correspondante en m^{-1} . Montrer que l'on réalise ainsi un «

multiplexage spatial » de l'information contenue dans l'objet, c'est-à-dire une reproduction multiple de cette information, autour de « fréquences spatiales porteuses » déterminées.

Quelles sont les valeurs de ces dernières en m^{-1} ?

c) On souhaite démoduler le signal optique afin de restituer l'objet initial. Proposer une méthode optique simple de « démodulation spatiale ».

B. BILANS D'ENERGIE EN ELECTROMAGNETISME

Constantes physiques :

Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Dans ce problème, on se propose d'analyser le concept d'énergie électromagnétique en effectuant un bilan de cette énergie en régime quasi stationnaire et en régime variable ; on met ainsi en évidence le stockage, l'échange et la production de cette énergie.

1. Energie électrique dans un condensateur. Bilan d'énergie électromécanique

En régime stationnaire, l'énergie électrostatique d'un système de charge est donnée par :

$$E = \int \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} dV$$

$\mathbf{E}$ étant le champ électrostatique, ϵ_0 la permittivité du vide et dV le volume élémentaire ; l'intégration porte sur tout l'espace.

Un condensateur est formé de deux armatures planes, de surface S , distantes de x dans le vide.

Les effets de bord sont négligés. L'une des armatures, A, de masse m , mobile suivant l'axe Ox est maintenue immobile grâce à un ressort, de raideur K (Figure B.1). En l'absence de charge, la distance qui sépare les armatures est x_0 . Le condensateur est connecté, à travers un conducteur ohmique de résistance r , à un générateur de tension de force électromotrice constante E_g . On désigne par q la charge de l'armature A et par V son potentiel. Des liaisons, non représentées sur la figure B.1, permettent un déplacement horizontal de cette armature avec des frottements négligeables.

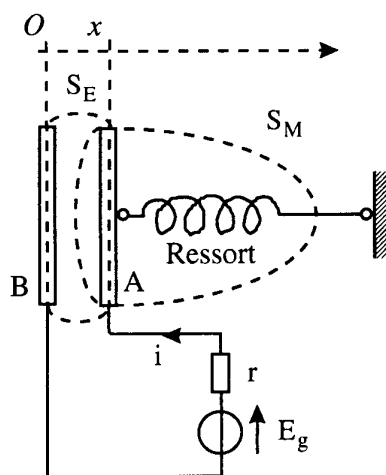


Figure B.1

On étudie les transferts d'énergie entre le dipôle générateur (E_g, r) et le système électromécanique S_{EM} , constitué par le condensateur et le ressort. Ce système est l'union de deux sous-systèmes, l'un électrique S_e et l'autre mécanique S_m (Figure B. 1). qui échangent de l'énergie grâce à l'armature mobile.

Entre deux dates infiniment voisines, les bilans d'énergie électrique E_E pour S_E , d'énergie mécanique E_m pour S_m ou d'énergie électromécanique $E_{Em} = E_E + E_m$ pour l'ensemble S_{EM} , peuvent s'écrire, pour chacun des systèmes, selon :

$$dE = \delta E^r + \delta E^p$$

Dans cette équation où r et p sont des indices et non des exposants, δE^r représente l'énergie reçue par le système, comptée positivement si elle est effectivement reçue par le système, et δE^p représente l'énergie produite par le système ; cette dernière est comptée positive pour une création, négative pour une destruction.

a) A partir de l'expression intégrale précédente de l'énergie électrostatique, trouver l'énergie E_E du condensateur en fonction de q et de sa capacité C . En déduire la variation élémentaire dE_E , lorsque la charge augmente de dq et la capacité augmente de dC . Quelle est l'énergie reçue δE^r_E , de la part du dipôle générateur (E_g, r), en fonction de V et dq ? Montrer que l'énergie électrique produite δE^p_E s'identifie à l'opposé du travail δW_e de la force électrique F_e s'exerçant sur l'armature mobile A. En effectuant le bilan d'énergie électrique pour S_E , en déduire δE^p_e et le travail δW_e de la force électrique F_e , en fonction de q , C et dC .

b) Trouver l'expression de F_e en fonction de q , S et ϵ_0 .

c) Quelle est l'équation différentielle du mouvement de l'armature A selon l'axe Ox ?

Exprimer l'énergie mécanique E_m du système S_M en fonction des variables x et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$? En déduire sa variation dE_m au cours d'un déplacement élémentaire dx . En identifiant le travail δW_e à l'énergie mécanique reçue δE^r_m , effectuer le bilan d'énergie mécanique pour S_M et retrouver l'équation différentielle du mouvement de A.

d) Effectuer le bilan d'énergie électromécanique pour le système S_{EM} ? Trouver le rendement de l'échange d'énergie entre le générateur et le condensateur en fonction de V et E_g . Commenter.

2. Energie électromagnétique associée à une onde se propageant dans un plasma dilué

Une onde électromagnétique, plane, monochromatique (pulsation ω) et polarisée, se propage dans la direction Ox dans un plasma neutre constitué d'ions positifs et d'électrons (masse m_e , charge $-e$). En raison de leur masse, les ions, pratiquement fixes, ne jouent qu'un rôle négligeable dans l'interaction entre l'onde et le plasma. ainsi que dans les mécanismes de conductivité envisagés dans la suite. En outre, la densité volumique n des électrons est suffisamment faible pour ne pas modifier le vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$ (k réel), $\mathbf{e}_x$ étant le vecteur unitaire associé à l'axe Ox . La vitesse de propagation est prise égale à sa valeur c dans le vide. Ainsi, le champ électrique associé, polarisé selon Oy , a pour expression :

$$\mathbf{E} = E_m(x) \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y.$$

On se propose d'effectuer un bilan de l'énergie mécanique E_m des électrons et de l'énergie électromagnétique E_{Em} associée au champ électromagnétique de l'onde.

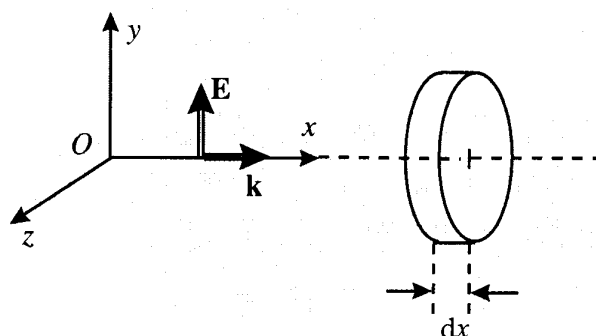


Figure B.2

a) Trouver l'expression du champ magnétique $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{E}$. Ecrire l'équation vectorielle à laquelle satisfait le mouvement d'un électron, de vitesse $\mathbf{v}$, soumis, d'une part au champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, et d'autre part aux collisions avec les autres charges ; ces collisions sont prises en compte sous la forme d'une seule force $\mathbf{F}_c$, d'expression $-m_e \mathbf{v} / \tau$, τ étant une durée caractéristique de collision.

b) On considère un cylindre d'épaisseur élémentaire dx et de section S normale à la direction de propagation de l'onde (Figure B.2). Etablir, pour les électrons de ce cylindre, une relation entre la variation élémentaire dE_k de leur énergie cinétique, le travail des forces électromagnétiques et le travail de $\mathbf{F}_c$. En introduisant l'énergie fournie par le champ électromagnétique et l'énergie perdue lors des collisions, montrer que cette relation peut être mise sous la forme d'un bilan d'énergie mécanique de ces électrons.

Quelle est, en régime sinusoïdal, la relation entre les puissances mécaniques reçue et produite en moyenne au cours du temps ? En déduire l'expression de la conductivité γ qui relie le courant volumique de charge $\mathbf{J}$ au champ $\mathbf{E}$, en fonction de n , m , e et τ .

c) On établit, à l'aide des équations de Maxwell, l'égalité suivante à laquelle satisfait le champ électromagnétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = -\text{div } \mathbf{R} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. En utilisant la relation :
$$\int_V \text{div } \mathbf{R} \, dV = \oint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

S étant la surface fermée délimitant le volume V , effectuer le bilan d'énergie pour le champ électromagnétique dans le volume du cylindre (Figure B.2). Exprimer le bilan d'énergie électromagnétique moyenne au cours du temps. En

déduire la relation suivante : $\frac{d}{dx} \overline{R(x)} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, la barre désignant la moyenne temporelle.

d) En tenant compte des deux bilans d'énergie précédemment établis, montrer que la valeur moyenne du carré de l'amplitude du champ électrique de l'onde $\overline{E^2(x)}$, appelée intensité $I(x)$, s'atténue au cours de la propagation selon : $I(x) = I(0) \exp(-\mu x)$ μ étant le coefficient d'atténuation linéique que l'on exprimera en fonction de γ , c et ϵ_0 .

Calculer μ dans le cas d'un milieu de faible conductivité $\gamma = 10^{-5} \text{ S.m}^{-1}$.