

Concepto

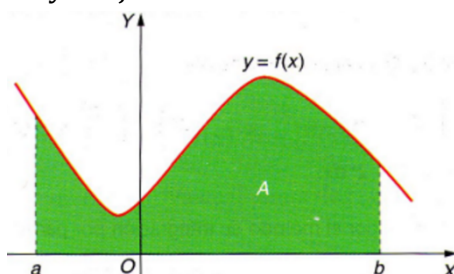
Sea una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se representa por

$$\int_a^b f(x) dx$$

- Si $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de f

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

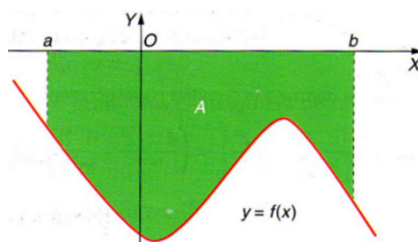
y el eje X:



- Si $f(x) < 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de f

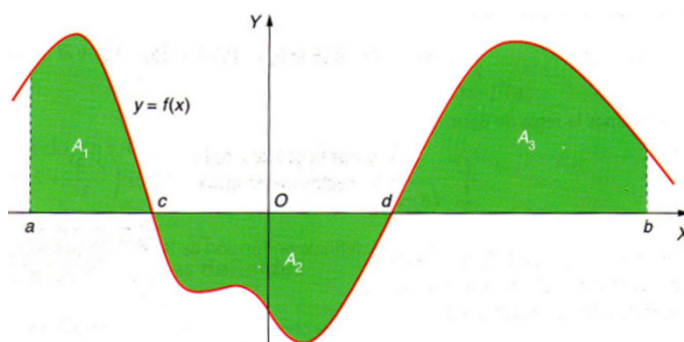
$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

y el eje X pero con signo negativo:



- Si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida es la suma de las áreas de los recintos situados por encima y por debajo del eje X (positiva si la gráfica está por encima del eje X y negativa si está por debajo):

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$$



En el siglo III a.C el gran matemático Arquímedes obtuvo el área de algunos recintos curvos (círculo, segmento parabólico...) mediante un método, que contenía la idea no precisada del paso al límite, cuyo proceso fundamental se puede expresar así:

“para hallar un área desconocida es preciso aproximarla por exceso y por defecto, cada vez con más aproximación, sumando áreas conocidas de “infinitos” trozos de área prácticamente nula”.

De forma similar, otro gran matemático como Kepler (siglo XVII), obtuvo la longitud de algunas curvas y el volumen de cuerpos de revolución.

Basándose en la idea esbozada por el gran Arquímedes, cada uno de estos problemas (áreas curvilíneas, longitudes de curvas, volúmenes,...) necesitó un procedimiento específico de resolución.

El primer paso de unificación del enfoque de estos problemas fué advertir que todos ellos podían expresarse de la misma forma:

(1) “cálculo del área encerrada entre una cierta curva $y = f(x)$ y el eje X”

Gracias al genio de matemáticos como Newton, Leibniz o Barrow (s.XVII) este problema (1) encontró solución en el cálculo infinitesimal:

“el área bajo una curva $y = f(x)$ se obtiene a partir de una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ es decir, F es una primitiva de f ($F' = f$).”

Esta última relación llamada Teorema fundamental del cálculo Infinitesimal, está considerado por muchos científicos como uno de los resultados más importantes en toda la Historia de las Matemáticas.

Hay, primordialmente, dos matemáticos coetáneos íntimamente ligados a los inicios del cálculo infinitesimal, el inglés Newton (1642-1727) y el alemán Leibniz (1646-1716), si bien, hubo otros matemáticos que de una u otra forma trabajaron en ello, como Kepler, Fermat (1601-1665), Cavalieri (1598-1647), incluso Arquímedes (Ap. 288 a.C.- Ap. 213 a.C.), que utilizó un método para el cálculo de áreas que se aproxima rudimentariamente al cálculo integral.

Newton y Leibniz (Newton unos años antes) sientan las bases del análisis infinitesimal aunque por vías distintas, quedando fuera de toda sospecha que alguno se aprovechara de los hallazgos del otro. Aunque en los inicios se comunicaban los progresos que hacía cada uno, llegaron a surgir comentarios de matemáticos ajenos a todo ello que, en ocasiones, calificaban la obra de Newton como plagio de la de Leibniz; en otras ocasiones era a la inversa, y esto provocó la enemistad de ambos.

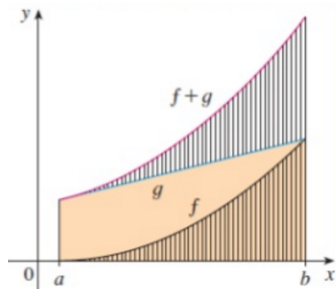
Todo esto hizo que Newton, poco antes de morir y habiendo fallecido Leibniz unos años antes, ordenara suprimir un comentario de su obra «Principia» en el que se citaba a su otrora amigo como autor de un procedimiento de cálculo similar al suyo.

Leibniz es, además, el responsable de la actual simbología del cálculo infinitesimal, y no sólo eso; fue el primer matemático que utilizó el $\cdot$ para expresar una multiplicación y $:$ para denotar un cociente, entre otras muchas más aportaciones.

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0, \text{ para cualquier función } f$$

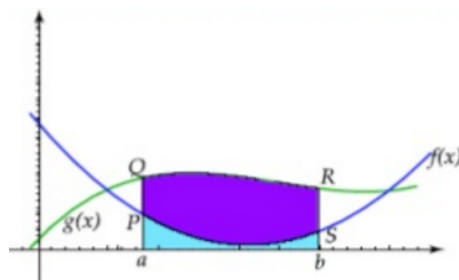
$$2) \begin{cases} \text{Si } f(x) > 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0 \\ \text{Si } f(x) < 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 0 \end{cases}$$

$$3) \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

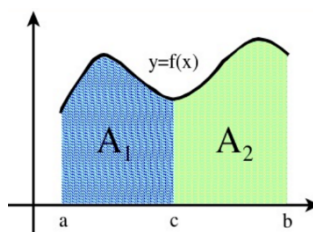


$$4) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$$

$$5) \text{ Si } \forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



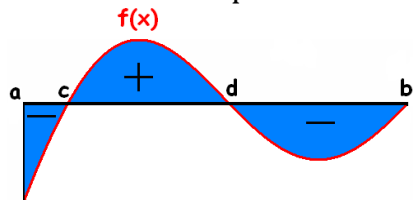
$$6) \text{ Si } a < c < b \Rightarrow \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$



La definición de integral de una función como el área de un determinado recinto, nos va a permitir establecer unas propiedades de la integral muy intuitivas y razonables desde un punto de vista geométrico.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \text{ para cualquier función } f$$

Esto es evidente pues el área de ese recinto es nula.



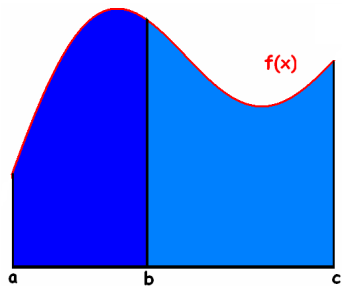
$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y } f(x) > 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y}$$

$$f(x) < 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 0$$

La definición de integral que hemos dado garantiza esos resultados

Si la función f cambiase de signo en el intervalo $[a, b]$ el valor de $\int_a^b f(x) dx$ nos da la suma algebraica de las áreas de los recintos situados por encima y por debajo del eje X. Por ello para calcular el área en términos absolutos, hay que calcular el área de cada recinto y antes de sumarlos cambiar el signo de las áreas de los recintos situados por debajo del eje X. En el ejemplo de arriba vemos que la función f determina tres recintos con el eje X, uno de área positiva entre c y d y dos de área negativa entre a y c y entre d y b respectivamente.



Si $a < b < c$ y f es una función continua en $[a, c]$ entonces:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

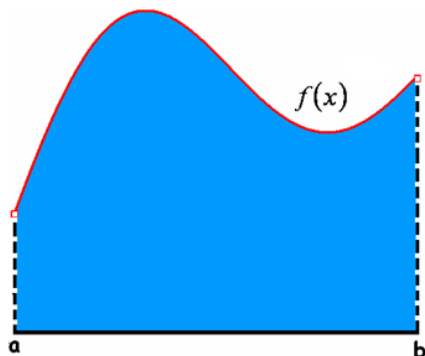
El resultado es evidente desde un punto de vista geométrico pues, la suma del área del recinto entre a y b y el área del recinto entre b y c es igual al área del recinto entre a y c.

Si f es una función continua en (a, b) y existen y son finitos los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ y

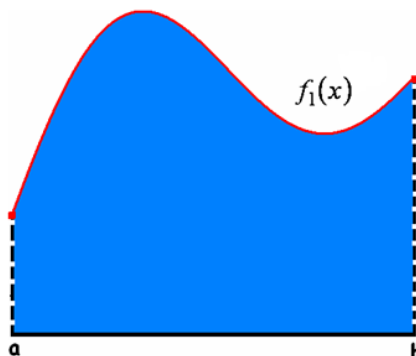
$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \beta$ entonces la función definida por $f_1(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \beta & \text{si } x = b \end{cases}$ es continua en $[a, b]$.

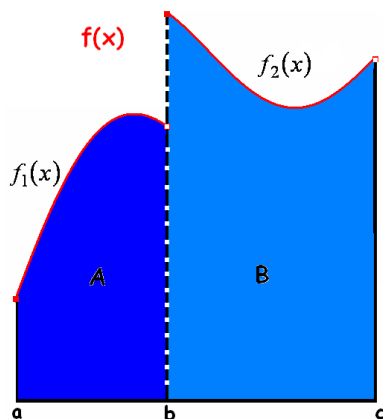
Definimos: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx$

Gráficamente el área del recinto determinado por f es la misma que el área del recinto determinado por f_1 . Observa las gráficas:



igual
área





La aplicación de las propiedades (3 y 4) a funciones continuas a trozos con la condición de que no tengan ramas infinitas (es decir, funciones con un número finito de discontinuidades de salto finito) amplía la definición de integral a estas funciones.

Fíjate en la función f dada al lado, el valor del área del recinto encerrado por f con el eje X entre las abscisas $x = a$ y $x = c$ es igual a la suma del área del recinto encerrado por f entre $x = a$ y $x = b$ (A) y del área del recinto encerrado por f entre $x = b$ y $x = c$ (B).

Si $f(x)$ tiene dos discontinuidades, una en $x = b$ y otra en $x = c$ tal que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \beta$

definimos las funciones continuas f_1 y f_2 :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leq x < b \\ \alpha & \text{si } x = b \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } b \leq x < c \\ \beta & \text{si } x = c \end{cases}$$

$$\int_a^c f(x) dx \stackrel{(3)}{=} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \stackrel{(4)}{=} \int_a^b f_1(x) dx + \int_b^c f_2(x) dx$$

Propiedades de linealidad de la integral:

La integral se comporta respecto de la suma de funciones y del producto de una constante por una función igual que la derivada:

$$6. \quad \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$7. \quad \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$$

Otra propiedad geoméricamente evidente es la siguiente:

$$8. \quad \text{si } \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

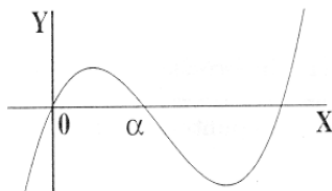
Actividades

Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$. (a) Esboza la gráfica de g . (b) Calcula

$$\int_0^2 g(x) dx$$

Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

(a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes



afirmaciones, razonando la respuesta:

- i) $F(\alpha) = 0$ ii) $F'(\alpha) = 0$ iii) F es creciente en $(0, \alpha)$ (b) Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$
- *****

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x}, & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2}, & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Sea $f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante

- (a) Determina α y β sabiendo que f es derivable. (b) Calcula $\int_{-2}^1 f(x) dx$
- *****

Sea $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln(2-x), & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

- (a) Estudia la derivabilidad de f en el punto $x = 1$. Sol.: No es derivable (aunque sí es continua)

- (b) Calcula $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ Sol: $\ln 2 - 1$
- *****

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1+mx, & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- (a) Determina el valor de m sabiendo que f es derivable. Sol.: $m = -1$ (b) Haz un esbozo de la gráfica de f .

- (c) Calcula $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Sol.: $\frac{5e-2}{2e}$
- *****

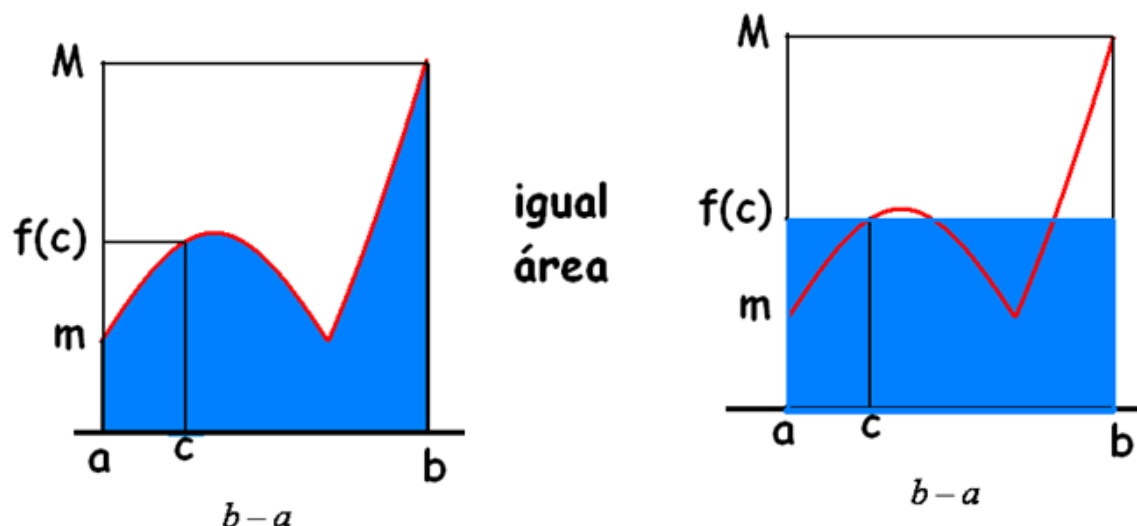
Se sabe que la función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax}, & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4}, & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua en $[0, \infty)$.

- (a) Halla el valor de a . Sol.: $a = 8$ (b) Calcula $\int_0^{10} f(x) dx$ Sol.: $\frac{206}{3} + 16\ln(2) - 16\ln(3)$
- *****

Teorema del valor medio del cálculo integral

9. Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces existe un $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Geométricamente significa que el área del recinto encerrada por la función f y el eje X entre $x=a$ y $x=b$ tiene un valor igual al área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$.

Demostración.-

Aplicamos Weierstrass: f continua en $[a, b]$ alcanza el valor máximo y mínimo en dicho intervalo, es decir, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$.

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

Por la propiedad (8) anterior tenemos:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b-a) \xrightarrow[\text{por } (b-a)]{\text{dividimos}} m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

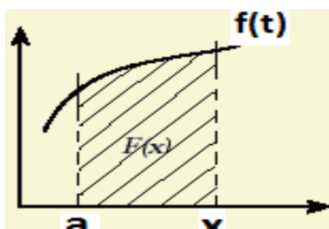
Aplicamos Darboux: f continua en $[a, b]$, $k = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \, dx$, $(m \leq k \leq M)$

$$c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \, dx \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Existe un

Teorema fundamental del cálculo integral, regla de Barrow

Dada una función f continua en $[a, b]$, se llama función área a la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$



Geométricamente, si $f(t) > 0$ en $[a, x]$ $F(x)$ es el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X en el intervalo $[a, x]$

El teorema fundamental del cálculo integral dice que $F(x)$ es derivable y su derivada es la función f :

$$F'(x) = f(x)$$

Por tanto, $\begin{cases} \text{Si } f(t) > 0, \text{ en } [a, b], \text{ entonces } F(x) \text{ es creciente en dicho intervalo} \\ \text{Si } f(t) < 0, \text{ en } [a, b], \text{ entonces } F(x) \text{ es decreciente en dicho intervalo} \end{cases}$

Regla de Barrow

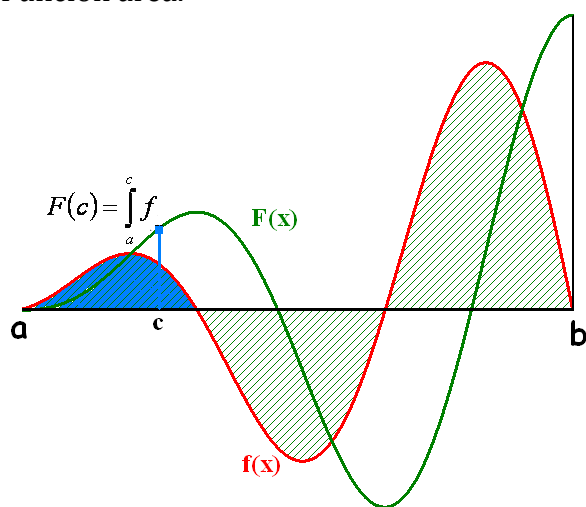
Si f es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

En la introducción al tema ya indicamos la estrecha relación que existe entre la integración (cálculo del área bajo una curva) y derivación.

Vamos a establecer esa relación con cierto rigor matemático.

Función área.-



Dada una función f continua en $[a, b]$ para cada número $c \in [a, b]$ podemos calcular $\int_a^c f(t) dt$ que sabemos determina el área del recinto bajo la función f entre $t = a$ y $t = c$.

Definimos una función F que para cada punto variable $x \in [a, b]$ nos da el área bajo la función f entre a y x , es decir:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Cuanto mayor sea f más rápidamente crece el área debajo de ella (F) y por tanto mayor será también su derivada F' .

Cuando f sea negativa, el área bajo f es un número negativo, por lo tanto F decrece y su derivada (F') es negativa.

Vamos a precisar esta relación tan estrecha entre f y F'

Teorema Fundamental del cálculo infinitesimal.-

Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, definida en dicho intervalo, es derivable y: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Antes de dar la demostración de este teorema vamos a interpretarlo.

La función área $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de la función $f(x)$, o sea, queda establecida la relación entre el cálculo integral (área bajo una curva) y la derivación (la función área es una primitiva de f que define la curva).

De ahí que al cálculo de primitivas también se le llame cálculo integral y que se utilice la notación $\int f(x) dx$ para designar una primitiva de $f(x)$.

Demostración.-

Sabemos que: $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Por otro lado sabemos que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f$$

Como f es continua en $[x, x+h]$ según el teorema valor medio C Integral(9) existe un $c \in [x, x+h]$ tal

que: $\int_x^{x+h} f = f(c)(x+h-x) = f(c)h$ Por tanto:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

Como $c \in [x, x+h]$ y f es continua en $[x, x+h]$ tendremos: $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$

En consecuencia hemos demostrado que: $F'(x) = f(x)$

El teorema fundamental nos abre las puertas del siguiente resultado:

Regla de Barrow.-

Si f es una función continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Demostración.-

Sabemos que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$

Por hipótesis $G(x)$ es una primitiva de f , es decir, $G'(x) = f(x)$

Sabemos que dos primitivas de una misma función difieren en una constante

$$F(x) - G(x) = k \Rightarrow F(x) = G(x) + k$$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0, \text{ por tanto: } F(a) = G(a) + k \Rightarrow 0 = G(a) + k \Rightarrow G(a) = -k$$

En consecuencia tenemos: $F(x) = G(x) - G(a)$ sustituyendo $x = b$ tenemos:

$$F(b) = G(b) - G(a) \text{ y además: } F(b) = \int_a^b f(t) dt \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Este resultado nos va a permitir calcular las áreas de los recintos sin tener que recurrir a resolver un límite (habitualmente complicado), sin más que calcular una primitiva $G(x)$ de la función dada $f(x)$ (como ya sabemos) y valorarla en los extremos del intervalo que encierra el área.

Actividades

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

Calcular la integral definida:

Calcular:

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

$$f(x) = \int_2^{x^2} [\ln(t-1) - 2] \cdot dt$$

Hallar los extremos de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^3 x & \text{si } x > 0 \\ -2x \cdot 2^{-2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}. \text{ Calcular } \int_{-1}^{\pi} f(x) \cdot dx$$

Dada la función

a)

$$b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{1 + \operatorname{sen}^2 3x} \cdot dx$$

Calcular las integrales siguientes:

$$F(x) = \int_0^x (1 + \cos^2 t) dt \quad \text{Calcula } F'(x).$$

Dada la función $F(x) = \int \operatorname{sen}^2 t dt$. Obtén los posibles puntos extremos de esta función en $[0, 2\pi]$.

Halla razonadamente la derivada de la función F(x):

$$F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsen \sqrt{t} dt$$

Si $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. ¿ Se cumplirá que $f(x) \leq 2$ para todo $x, x \in [0,1]$? .
(Razona la respuesta, si es falso pon un ejemplo que lo pruebe) .

¿Cuál de las siguientes igualdades es correcta? a) b)

c) Ninguna de las anteriores es correcta.

¿En qué caso se cumplirá la siguiente igualdad ?

a) Si $a > b > c$ b) Si $a < c < b$ c) Si $a < b > c$

¿Cuál es el resultado de la integral ?

a) b) 0 c)

Calcula: $\int_0^5 (6x - x^2) dx - \int_0^5 x dx$

Calcular: $\int_{-2}^1 (x^2 - x) dx$ $\int_{-1}^3 (x^2 - 4) dx$ $\int_0^2 (3 - x^3) dx$ $\int_a^b x^2 dx$

Sabiendo que $\int_{-1}^3 x^3 dx = 20$, $\int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{28}{3}$, $\int_{-1}^3 x dx = 4$, $\int_0^{\pi/3} \sen x dx = \frac{1}{2}$

$$, \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

calcular: $\int_{-1}^2 (-5) dx$ $\int_3^{-1} 8w dw$ $\int_{-1}^3 (-x^3 + 2x - 2) dx$ $\int_{-1}^3 (-x)^3 dx$

$$\int_{-1}^3 t(t-1)(t+2) dt \quad \int_{\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sen x} \quad \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_1^3 x^3 dx \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\sen 2\theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \sen x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sen x dx \quad \int_{-1}^{1/2} 2x dx - \int_3^{1/2} 2x dx$$

Hallar un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral definida dada

$$\int_{-1}^2 (x^3 + 4x) dx \quad \int_2^5 \frac{dx}{x-1} \quad \int_{-2}^2 (x^2 + x + 1) dx \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+1} dx$$

Usar el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida dada

$$\int_3^2 x(x-2)(x+2) dx \quad \int_{-3}^{-1} (x^2 - 4x + 8) dx \quad \int_1^3 \frac{dz}{z^2 + 10z + 25}$$

$$\int_0^4 \frac{t^2 dt}{\sqrt{2t+1}}$$

$$\int_0^1 \frac{y+1}{\sqrt{y^2+2y+3}} dy \quad \int_{-2}^0 (w+1)^2 dw \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$\int_{-4}^{12} \sqrt{r+1} dr \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\csc t \operatorname{tg} t)^2 dt \quad \int_0^4 |2z-6| dz \quad \int_0^3 y \sqrt{y+1} dy$$

$$\int_{-8}^3 \sqrt{|x|+1} dx \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2} dx \quad \int_0^2 |z^2-1| dz$$

$$\int_0^2 x \sqrt{2x^2+1} dx \quad \int_{-4}^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^5 dx$$

$$\int_0^3 (2-\sqrt{x})^2 dx + \int_3^9 (2-\sqrt{x})^2 dx$$

Hallar: $\int_{-1}^2 \left[\int_{-1}^x 12t^2 dt \right] dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^t \sin x dx \right] dt \quad \frac{d}{dx} \int_{6x-1}^0 \sqrt{4t+9} dt$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (3t^2-2t) dt \quad D_x \int_0^{5x^2} \sqrt{t^4+1} dt \quad D_t \int_1^{\operatorname{tg} t} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad \frac{d}{dx} \int_{3x}^{x^2} \frac{dt}{t^2+1}$$

Evaluar las integrales siguientes $\int_0^{1/4} (1-4z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{5-2t+t^2} \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{1+x^2} dx$

Calcule las siguientes integrales definidas e interprete el resultado:

$$\int_0^2 3x dx \quad \int_1^2 (x+2) dx \quad \int_{-1}^3 (3x^2-x+6) dx \quad \int_{-1}^3 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

Evaluar la integral dada $\int_{-1}^0 \frac{4+e^{x+1}}{e^x} dx \quad \int_0^4 \frac{dv}{2v+1}$

Aplicando un cambio de variable adecuado, demuestra que si f(x) es una función impar (es decir f(-x) =

-f(x)) entonces: $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$

Considerar la función $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$. Se pide:

- Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión.
- Razonar si existen asíntotas y en caso de que existan, calcularlas.
- Representar la gráfica de la función.

d) Calcular $\int_1^4 \frac{1+x^2}{x^2} dx$. Explicar qué representa este valor.

SOLUCIÓN.

a) Tenemos: $f'(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow$ luego la función es creciente en $(-\infty, 0)$ y

decreciente en $(0, \infty)$. No tiene puntos de máximo ni de mínimo porque $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$

$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0 \quad \forall x \Rightarrow$ la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión porque $f''(x) \neq 0 \quad \forall x$

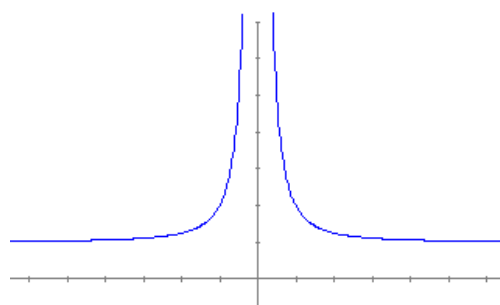
b) $x = 0$ es una asíntota vertical pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x^2} = \infty$$

$y = 1$ es una asíntota horizontal pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

c)



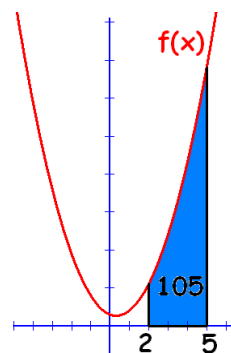
tiene

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_1^4 \frac{1+x^2}{x^2} dx &= \int_1^4 (x^{-2} + 1) dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} + x \right]_1^4 = \\ &= \left[-\frac{1}{x} + x \right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4} + 4 \right) - (-1 + 1) = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Representa el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

$$I = \int_2^5 3x^2 - 2x + 3 dx$$

vamos a resolver esta área aplicando Barrow.



Como la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ es continua en $[2, 5]$

Una primitiva de f : $G(x) = \int 3x^2 - 2x + 3 \, dx = x^3 - x^2 + 3x$

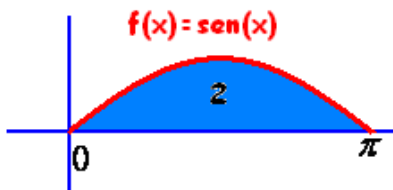
$$G(a) = G(2) = 10 \quad G(b) = G(5) = 115$$

$$I = \int_2^5 3x^2 - 2x + 3 \, dx = G(5) - G(2) = 115 - 10 = 105 \, u^2$$

Observa que ese es geoméricamente el valor del área del recinto encerrado por f y el eje X entre 2 y 5.

$$I = \int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

Aplicamos de nuevo la regla de Barrow para resolver esta área.



Una primitiva de $f(x) = \sin x$ es:

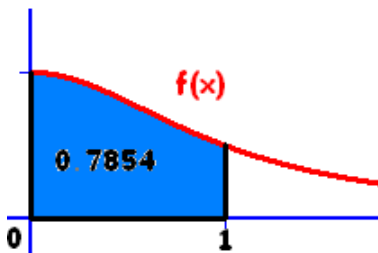
$$G(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$G(\pi) = -\cos(\pi) = -(-1) = 1 \quad ; \quad G(0) = -\cos(0) = -1$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin t \, dt = G(\pi) - G(0) = 1 + 1 = 2$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Aplicamos finalmente la regla de Barrow para resolver esta área.



Primitiva de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$G(x) = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctg(x)$$

$$G(1) = \arctg(1) \approx 0.7854 \quad ; \quad G(0) = \arctg(0) = 0$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = G(1) - G(0) \approx 0.7854$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+5}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Sea la función

con a un parámetro real. Se pide:

- a) Determinar, razonadamente, el valor del parámetro a para que f(x) sea continua en x = 0.
 b) ¿Para qué valores del parámetro a es continua f(x) en x = 3? Razonar la respuesta.

- c) Determina el valor del parámetro a para que $\int_0^3 f(x) dx = 15$

SOLUCIÓN.

- a) Para que la función sea continua en x = 0 debe ser $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Para verificar esta condición debe cumplirse:

i) $\exists f(0) = a$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) \Leftrightarrow 1 = a$

iii) Para a = 1 se verifica: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

es decir, para que la función sea continua en x = 0 debe ser a = 1.

- b) Debe ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$:

i) $\exists f(3) = 9 + a$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + a) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-3} \Leftrightarrow 9 + a = \infty \Rightarrow$ no existe valor de a

para el que $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y por tanto, la función no es continua en x = 3 (a la derecha de x = 3 la función tiene una asíntota vertical)

c) $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + a) dx = \left[\frac{x^3}{3} + ax \right]_0^3 = 9 + 3a = 15 \Rightarrow a = 2$

$$\int_2^8 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^8 = \frac{(8)^2}{2} - \frac{(2)^2}{2} = 32 - 2 = 30$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 \sqrt[3]{x^2} dx &= \int_{-2}^5 x^{2/3} dx = \left[\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} \right]_{-2}^5 = \left[\frac{3}{5} x^{5/3} \right]_{-2}^5 = \frac{3}{5} (5)^{5/3} - \frac{3}{5} (-2)^{5/3} = \\ &= \frac{3}{5} (14.62) - \frac{3}{5} (-3.1748) = \frac{3}{5} (14.62) + \frac{3}{5} (3.1748) = 10.7 \end{aligned}$$

$$\int_2^3 (x-3)^2 dx = \int_{-1}^0 (u)^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^0 = 0 - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$u = x - 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\text{cuando } x = 2 \Rightarrow u = 2 - 3 = -1$$

$$\text{cuando } x = 3 \Rightarrow u = 3 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x-3)^2 dx &= \int_2^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_2^3 = \\ &= \left[\frac{(3)^3}{3} - 3(3)^2 + 9(3) \right] - \left[\frac{(2)^3}{3} - 3(2)^2 + 9(2) \right] = \\ &= 9 - 27 + 27 - \frac{8}{3} + 12 - 18 = 3 - \frac{8}{3} = \frac{9}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Considera la función f dada por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$. Halla $\int_1^3 f(x) dx$

Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$, Calcula:

$$(a) \int_2^3 f(x) dx \quad (b) \int_2^3 (5f(x) - 7) dx \quad (c) \int_2^3 [F(x)]^2 f(x) dx$$

Calcula las siguientes integrales definidas: a) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$ (Sugerencia: Haz el cambio $t = \sqrt{x}$)

$$(b) \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx \quad (Sugerencia: integrar por partes) \quad (c) \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$$

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene máximo absoluto en el punto de

abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$ y que $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{32}{2}$. Halla a , b y c .

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$, tiene un

extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$

Calcula el valor de $a > 0$ para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2} dx = 1$

Determina las siguientes integrales definidas: a) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx$ b) $\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx$ c) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

d) $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx$ e) $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx$ (Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$)

$$\text{Sol.: a) } \pi^2 + 4 \quad \text{b) } 5 \ln 5 - 3 \ln 3 - 6 \quad \text{c) } \frac{1}{6} + \ln 3 - \ln 4 \quad \text{d) } \frac{9}{2} - \frac{23}{3} \ln 2 \quad \text{e) } 2e^2 - 2e + 2 \ln \frac{1+e}{1+e^2}$$

Sea $I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx$. (a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

(b) Calcula el valor de I . Sol.: a) $\int_1^0 (2t^2 - 2t) dt$ b) $\frac{1}{3}$

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x) dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12 .

Sol.: $a = -2$, $b = 25$

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d .

Sol.: $a = -1$ $b = 0$ $c = 3$ $d = 1$

De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b .

Sol.: $a = b = \frac{2e-3}{2e-1}$

Calcula: b) $\int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx$ Sol.: $\frac{\pi}{4}$ c) $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$ Sol.: $\frac{2e^3 + 1}{9}$ d) $\int_{-1}^0 \ln(2+x) dx$
Sol.: $2\ln(2) - 1$ e) $\int_0^1 x e^{-3x} dx$ Sol.: $\frac{e^3 - 4}{9e^3}$ f) $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$ Sol.: $\frac{8 - 26\ln(3)}{4}$

g) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$ Sol.: $\frac{-\ln(3)}{2}$ $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$

(a) Exprésala haciendo el cambio de variable $1 + \sqrt{x} = t$ Sol.: $I = \int_2^4 \frac{2(t-1)}{t} dt$ (b) Calcula I .
Sol.: $4 - 2\ln(2)$

Considera la integral definida $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1} dx$

(a) Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$ Sol.: $I = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t} dt$ (b) Calcula I .
Sol.: $2 + 2\ln(2)$

De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d

Sol.: $a = -1$ $c = 3$ $b = d = 0$

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo

relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x

$= -1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x) dx = 6$, halla a , b y c . Sol.: $a=3$ $b=0$ $c=\frac{19}{4}$

Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$

Sol.: $P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$, se define la nueva función $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Dar la expresión F definida a trozos y dibujarla en el intervalo $[0,2]$.

Prueba previa Selectividad 1998

Calcular el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x dx$

Calcular $\int_1^2 \ln x dx$

Calcula el trabajo realizado por una fuerza $F = F(x)$ al alargar un muelle, hasta una longitud (x) . Sol

Ley de "Hooke": la fuerza es proporcional al desplazamiento: $F(x) = k x$

$$W = \int_a^b F(x) dx = \int_0^x k t dt = k \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{k x^2}{2} = \frac{1}{2} F(x) \cdot x$$