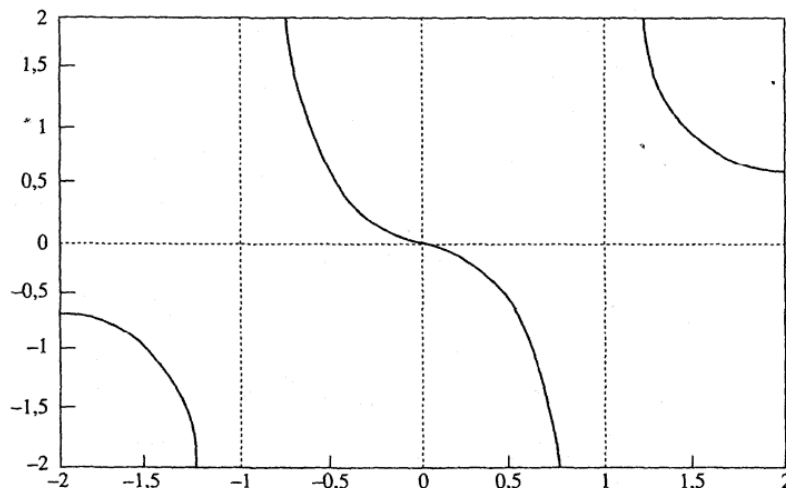


1.- Fíjate en la gráfica siguiente y deduce de ella todos los datos que puedas sobre la función que representa.



Justifica, si puede corresponder a alguna de las funciones f , g o h definidas como sigue:

$$f(x) = \frac{-x^3}{1-x^4}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, \quad h(x) = \frac{-x}{1-x^2}$$

Resolución

Sea $p(x)$ la función correspondiente a la gráfica dada. Las características más destacadas son:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} p(x) = +\infty; \text{ asíntota vertical, AV: } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} p(x) = +\infty; \text{ asíntota vertical, AV: } x = 1$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = 0$. p es decreciente, convexa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
punto de inflexión $(0, 0)$

Como la gráfica pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ entonces $p(0) = 0$. Luego, la gráfica no corresponde a la de $g(x)$ porque $g(0) = \frac{0+1}{0^2-1} = -1 \neq 0$

La gráfica puede corresponder a la de la función f o h .

2.- Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 6x, & \text{si } 3 < x \end{cases}$
(a) Determina los puntos en los que f es derivable y en cada uno de ellos calcula su derivada.

Resolución

Si $x \neq 0, x \neq 3$, f es continua y derivable siendo $f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 6, & \text{si } 3 < x \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -0^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2 \cdot 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 3^2 = 9 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 \cdot 3 = 18 \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = 3, \text{ ni derivable tampoco.}$$

Conclusión: f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$

(b) Calcula $\int_{-3}^3 3f(x) dx$

Resolución

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0 \\ 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 6x, & \text{si } 3 < x \end{cases}$. Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración, $\int_{-3}^3 3f(x) dx = \int_{-3}^0 3f(x) dx + \int_0^3 3f(x) dx$

$I_1 = \int_{-3}^0 3f(x) dx = \int_{-3}^0 (-3x^2) dx$. Una primitiva es $p(x) = -x^3$.

Por la regla de Barrow, $I_1 = p(0) - p(-3) = -0^3 - [-(-3)^3] = -27$

$I_2 = \int_0^3 3f(x) dx = \int_0^3 (3x^2) dx$. Una primitiva es $q(x) = x^3$.

Por la regla de Barrow, $I_2 = q(3) - q(0) = 3^3 - 0^3 = 27$

Por tanto, $\int_{-3}^3 3f(x) dx = -27 + 27 = 0$

3.- Determina el punto de la curva cuya ecuación es $y = x^2$ que está más cerca del punto A(3, 0).

Resolución

Sea P(x, x²) el punto de la curva que buscamos.

La función a minimizar es $f(x) = \text{dist}^2(A, P) = (x - 3)^2 + (x^2)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3) = 0$. Usando la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & \\ & & 4 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 4 & 3 & 5 & 4 & \end{array}$$

queda $(x - 1)(2x^2 + 2x + 3) = 0$; $x = 1$, $2x^2 + 2x + 3 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2}$
(imposible)

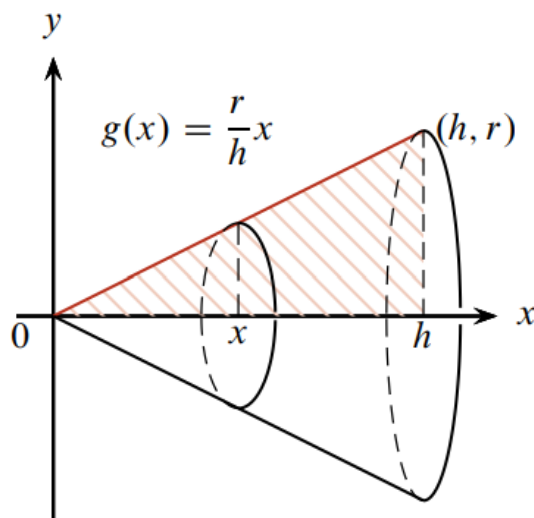
$f''(x) = 12x^2 + 2$; $f''(1) = 12 \cdot 1^2 + 2 = 14 > 0$. Luego, para $x = 1$ la distancia es mínima.

El punto que se busca es $P(1, 1)$

4.- Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h .

Resolución

El cono circular recto de radio r y altura h se puede obtener al girar el segmento de la figura alrededor del eje OX:



Usando el cálculo integral, el volumen sería $V = \int_0^h \pi [g(x)]^2 dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}$. Por la regla de Barrow,

$$V = p(h) - p(0) = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} - \frac{\pi r^2 0^3}{3h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3}, \text{ que es la fórmula geométrica que conocemos.}$$

5.- Halla todas las posibles rectas tangentes a la curva $y = x^4$ que pasan por el punto $(2, 0)$ (ten en cuenta que este punto no está en la curva).

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(a, f(a))$

es rtg: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f(a) = a^4$, $f'(a) = 4a^3$

La recta tangente es rtg: $y = 4a^3(x - a) + a^4$; rtg: $y = 4a^3x - 3a^4$

Como la recta tangente debe pasar por $(2, 0)$, entonces $0 = 4a^3 \cdot 2 - 3a^4 \Rightarrow a^3(3a - 8) = 0 \Rightarrow a = 0$,
 $a = \frac{8}{3}$

Para $a = 0$, rtg: $y = 0$ y para $a = \frac{8}{3}$ rtg: $y = 4\left(\frac{8}{3}\right)^3 x - 3\left(\frac{8}{3}\right)^4 \Rightarrow \text{rtg: } y = \frac{2048x - 4096}{27}$

6.- ¿Cuántos puntos x del intervalo $[0, 1]$ satisfacen la igualdad $x = \cos x$? Justifica la respuesta y enuncia alguno de los teoremas importantes que utilices.

Resolución

Sea la ecuación $x - \cos x = 0$. Vamos a probar que la ecuación tiene solución. Para ello vamos a usar teorema de Bolzano, que dice: si f es continua en $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

Tomamos $f(x) = x - \cos x$, para $x \in [0, 1]$, que cumple
 $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ y $f(1) = 1 - \cos 1 \cong 0,46 > 0$

f es continua en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas, en particular lo es en $[0, 1]$.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $c - \cos c = 0 \Rightarrow c = \cos c$. Luego, c es una solución de la ecuación.

Vamos a probar que la solución es única. Para ello vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $k \in (a, b)$, tal que $f'(k) = 0$.

Si hubiese dos raíces, a y b , entonces $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, existiría un $k \in (a, b)$ tal que $f'(k) = 0$.

$f'(x) = 1 + \sin x > 0$ pues al ser $0 < x < 1$, entonces x está en el I cuadrante y su seno es positivo.

Conclusión: Sólo hay un punto x del intervalo $(0, 1)$ que satisface la igualdad.

7.- Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \cos(x - 1), & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) Determina los puntos en los que f es continua y los puntos en los que f es derivable.

Resolución

Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser combinación de funciones continuas y derivables siendo

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \sin(x-1), & \text{si } x < 1 \\ \frac{(x-1)\cos(x-1) - 1\sin(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)\cos(x-1) - \sin(x-1)}{(x-1)^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 - 1 + \cos(1-1) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\sin(1-1)}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

$$\text{Aplicamos la regla de L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[\sin(x-1)]'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos(x-1)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

Por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$. Luego, f es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 - \sin(1-1) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{(1-1)\cos(1-1) - \sin(1-1)}{(1-1)^2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[(x-1)\cos(x-1) - \sin(x-1)]'}{[(x-1)^2]'} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1.\cos(x-1) - (x-1)\sin(x-1) - \cos(x-1)}{2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)\sin(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\sin(x-1)}{2} = \frac{-\sin(1-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$. Luego, f NO es derivable en $x = 1$.

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

(b) ¿Cumple f en $[0, 2]$ las condiciones del teorema de Rolle?

Resolución

El teorema de Rolle dice: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $k \in (a, b)$, tal que $f'(k) = 0$.

f es continua en $[0, 2]$ por ser continua en $\mathbb{R}$,

$f(0) = 0 - 1 + \cos(0 - 1) = \cos \cos(-1) - 1 \neq f(2) = \frac{\sin(2-1)}{2-1} = \sin 1$; f NO es derivable en $(0, 2)$ por no ser derivable en $x = 1$.

Por tanto, f no cumple todas las condiciones del teorema de Rolle

8.- Aplica las propiedades de la integral definida para indicar, sin calcularlas, cuál de las siguientes

integrales es mayor: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ó $\int_0^1 e^{-x^3} dx$

Resolución

Si $0 < x < 1$, entonces $0 < x^3 < x^2 < 1$. Por el crecimiento de la exponencial, $e^0 < e^{x^3} < e^{x^2} < e^1$

O sea, $1 < e^{x^3} < e^{x^2} < e$. Luego, $\frac{1}{1} > \frac{1}{e^{x^3}} > \frac{1}{e^{x^2}} > \frac{1}{e}$. O sea, $\frac{1}{e} < e^{-x^2} < e^{-x^3} < 1$.

Por la propiedad de monotonía de la integral definida, $\int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 e^{-x^3} dx$

9.- De una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que si x no es un número entero entonces f es derivable en x y se tiene $f'(x) = x$. Por otro lado, si x es un número entero entonces f no es derivable en x .

Calcula, si es posible, la integral $\int_{0,01}^{0,1} 3f(x) dx$

Resolución

Para $x \in (0,01; 0,1)$ sabemos que f es derivable y $f'(x) = x$. Luego, en dicho intervalo $f(x) = \frac{x^2}{2} + k$

$\int_{0,01}^{0,1} 3f(x) dx = \int_{0,01}^{0,1} \left(\frac{3x^2}{2} + 3k \right) dx$. Una primitiva es $p(x) = \frac{x^3}{2} + 3kx = \frac{x^3 + 6kx}{2}$. Por Barrow,

$\int_{0,01}^{0,1} 3f(x) dx = p(0,1) - p(0,01) = \frac{0,1^3 + 6k \cdot 0,1}{2} - \frac{0,01^3 + 6k \cdot 0,01}{2} = \frac{9,99 \cdot 10^{-4} - 0,06k}{2} = 4,995 \cdot 10^{-4} - 0,03k$

10.- Considera la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(a) Determina el dominio de definición de f .

Resolución

La función $\ln$ sólo existe si $x > 0$ y los denominadores de las fracciones no se anulan porque estas se definen para $x \neq 1$. Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$.

(b) Determina el conjunto de puntos en el que f es continua.

(c) Determina las asíntotas de f .

Resolución

Si $x \neq 1$, f es continua por ser resultado de operar con funciones continuas.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \frac{1 \ln 1 - 1 + 1}{(1-1) \ln 1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{[(x-1) \ln x]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln 1 + 1 - \frac{1}{1}} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación. Por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(\ln x + 1 - \frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(1) = 1$. Conclusión: f sólo es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$, 11.

$\left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{\ln x}\right)1 + 0$. Luego, f tiene asíntota horizontal en $+\infty$, que es la

recta de ecuación AH: $y = 1$.

11.- Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral y aplícalo para determinar los máximos y

mínimos relativos de la función f definida por $f(x) = \int_0^x (t^3 - 4t) dt$

Resolución

El teorema dice: Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$

Usando el teorema, $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2 \text{ ó } x = -2$.

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Mínimo relativo: $x = -2, y = f(-2) = \int_0^{-2} (t^3 - 4t) dt$. Una primitiva de la función a integrar es

$$p(x) = \frac{t^4}{4} - 2t^2 = \frac{t^4 - 8t^2}{4}. \text{ Por Barrow, } y = p(-2) - p(0) = \frac{(-2)^4 - 8(-2)^2}{4} - \frac{0^4 - 8 \cdot 0^2}{4} = -4, (-2, -4)$$

Mínimo relativo: $x = 2, y = f(2) = \int_0^2 (t^3 - 4t) dt$. Una primitiva de la función a integrar es

$$p(x) = \frac{t^4}{4} - 2t^2 = \frac{t^4 - 8t^2}{4}. \text{ Por Barrow, } y = p(2) - p(0) = \frac{2^4 - 8 \cdot 2^2}{4} - \frac{0^4 - 8 \cdot 0^2}{4} = -4, \text{ punto } (2, -4)$$

Máximo relativo: $x = 0, y = f(0) = \int_0^0 (t^3 - 4t) dt = 0$, punto $(0, 0)$

12.- Para cada $r \geq 1$ se define la función $f_r: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mediante $f_r(x) = x^r$.

(a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f_r en el punto $(1, 1)$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(a, f(a))

es rtg: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $a = 1$, $f(x) = x^r$, $f'(x) = rx^{r-1}$,

$$f(a) = f(1) = 1, f'(a) = f'(1) = r \cdot 1^{r-1} = r$$

La recta tangente es $rtg: y = r(x - 1) + 1$; $rtg: y = rx + 1 - r$

(b) Calcula el área $A(r)$ de la región limitada por la gráfica de f_r , su tangente en el punto $(1, 1)$ y el eje OX.

Resolución

El área que se pide es $A(r) = \int_0^1 (x^r - rx + r - 1) dx$. Una primitiva es

$$p(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{rx^2}{2} + (r - 1)x. \text{ Por la regla de Barrow,}$$

$$A(r) = p(1) - p(0) = \frac{1^{r+1}}{r+1} - \frac{r1^2}{2} + (r - 1)1 - \left[\frac{0^{r+1}}{r+1} - \frac{r0^2}{2} + (r - 1)0 \right] = \frac{1}{r+1} - \frac{r}{2} + r - 1 = \frac{r^2 - r}{2r + 2}$$

(c) ¿Para qué valor de $r \geq 1$ es el área $A(r)$ máxima?

Resolución

$$A'(r) = \frac{(2r-1)(2r+2) - (r^2-r)2}{4(r+1)^2} = \frac{2(r^2+2r-1)}{4(r+1)^2} = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

Como $r \geq 1$, la única solución válida es $r = \sqrt{2} - 1$

13.- Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x - |3 - 2x||$ y represéntala gráficamente.

Resolución

Usando la definición de valor absoluto,

$$f(x) = \{|2x - 3 + 2x|, \text{ si } x < 3/2 \mid 2x + 3 - 2x|, \text{ si } x \geq 3/2\} = \{|4x - 3|, \text{ si } x < 3/2 \mid 3, \text{ si } x \geq 3/2\}$$

$f(x) = \{3 - 4x, \text{ si } x < 3/4 \mid 4x - 3, \text{ si } 3/4 \leq x < 3/2 \mid 3, \text{ si } x \geq 3/2\}$ continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de valores absolutos y funciones

polinómicas (la función valor absoluto y las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$)

Aunque no se pide, estudiemos también su derivabilidad:

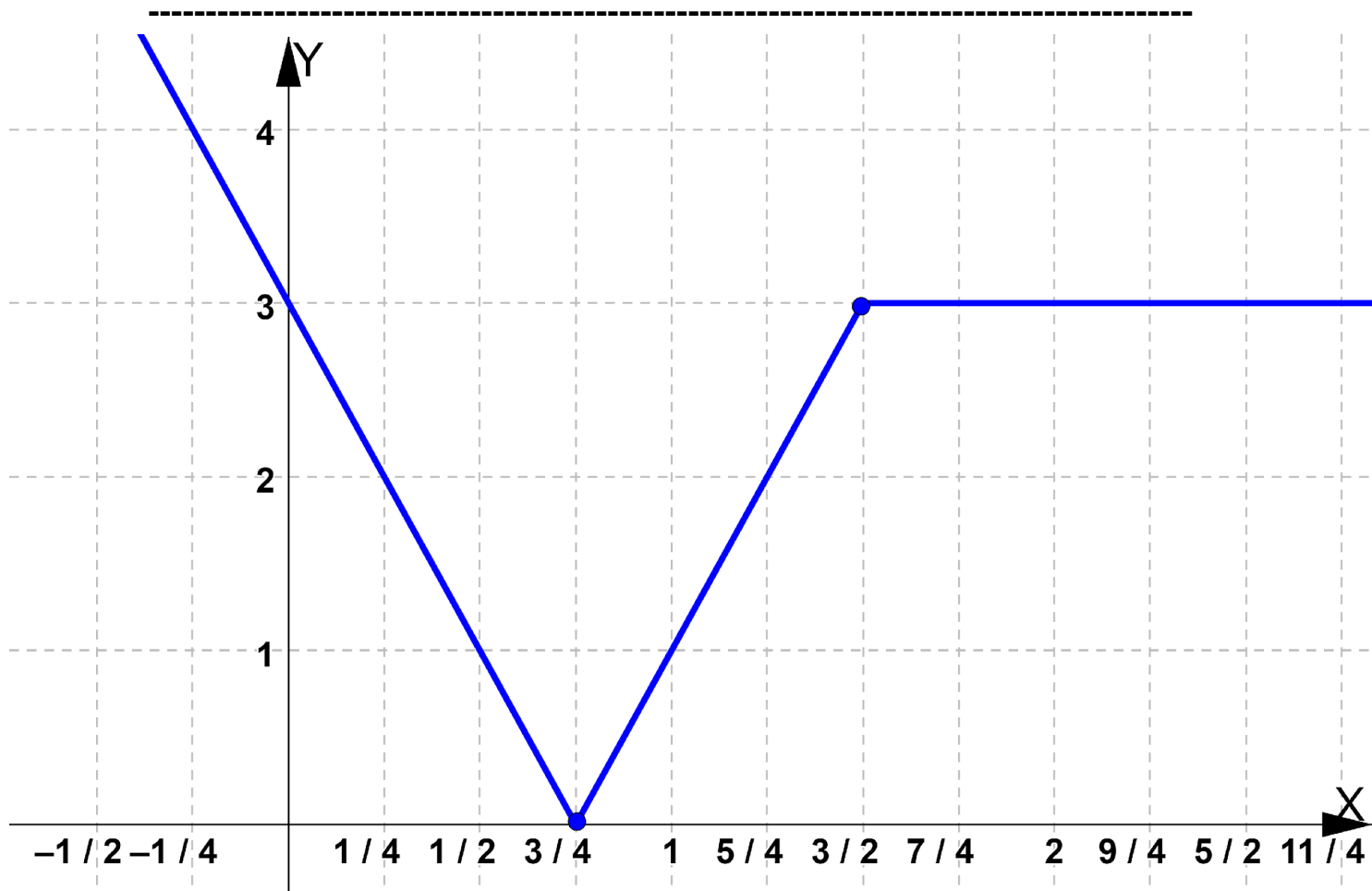
Si $x \neq 3/4, x \neq 3/2$, f es derivable siendo $f'(x) = \{-4, \text{ si } x < 3/4 \mid 4, \text{ si } 3/4 < x < 3/2 \mid 0, \text{ si } x > 3/2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 3/4^-} f'(x) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 3/4^+} f'(x) = 4 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = 3/4$$

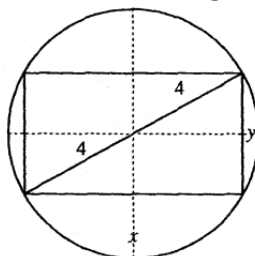
$$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f'(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 3/2^+} f'(x) = 0 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = 3/2$$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{3/4; 3/2\}$

Un esbozo de la gráfica de f sería:



14.- En una circunferencia de radio 4 se inscribe un rectángulo (mira, la figura).



¿Cuáles son las dimensiones del que tiene mayor área?

Resolución

Usando el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 8^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$

Función a maximizar: $f(x) = A(\text{rectángulo}) = xy = x\sqrt{64 - x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{64 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - x^2 - x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{32}$$

Si $x < \sqrt{32}$, $f'(x) > 0$ (f creciente) y si $x > \sqrt{32}$, $f'(x) < 0$ (f decreciente) $\Rightarrow$ máximo en $x = \sqrt{32}$

$y = \sqrt{64 - (\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$. Por tanto, es un cuadrado de lado $\sqrt{32} \cong 5,66$

15.- Utiliza el cambio de variable $x = \sin t$ para calcular $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

Observación: Ten en cuenta que $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$.

Resolución

Sea $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Haciendo el cambio de variable $x = \sin t$; $dx = \cos t dt$

Si $x = 0$, $0 = \sin t$, $t = 0$ y si $x = 1$, $1 = \sin t$, $t = \frac{\pi}{2}$

Sustituyendo, $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt$

Una primitiva de la función integrando es $p(t) = \frac{t + \frac{\sin(2t)}{2}}{2} = \frac{2t + \sin(2t)}{4}$. Por la regla de Barrow,

$$I = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{4} - \frac{2 \cdot 0 + \sin(2 \cdot 0)}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$$

16.-

(a) Halla los puntos de la gráfica de la función f definida, por $f(x) = 2x^4 - x^2 + x$ en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Resolución

f es derivable y $f'(x) = 8x^3 - 2x + 1$; la bisectriz del primer cuadrante es $y = x$, que tiene pendiente 1. Buscamos los puntos $P(a, f(a))$ de la gráfica de f , para los que $f'(a) = 1$.

Sustituyendo, $8a^3 - 2a + 1 = 1 \Rightarrow 8a^3 - 2a = 2a(4a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$, $a = \frac{-1}{2}$ ó $a = \frac{1}{2}$

Para $a = 0$, $f(a) = f(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^2 + 0 = 0$, punto $P_1(0, 0)$

Para $a = \frac{-1}{2}$, $f(a) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{-5}{8}$, punto $P_2\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{8}\right)$

Para $a = \frac{1}{2}$, $f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, punto $P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

(b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} tg x \cdot \ln \ln x$

Resolución

$\lim_{x \rightarrow 0} tg x \cdot \ln \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln x}{\cot g x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln \ln x}{\cos x \sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\ln \ln 0}{\frac{\cos 0}{\sin 0}} = \frac{-\infty}{\pm \infty}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\frac{(\ln \ln x)'}{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \frac{-\sin^2 x}{x} = \frac{-\sin^2 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $\frac{(-\sin^2 x)'}{(x)'} = \frac{-2 \sin x \cos x}{1} = -2 \sin 0 \cos 0 = 0$

Luego, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} tg x \cdot \ln \ln x = 0$

17.- Dados tres números reales a , b y c , sea f la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq c \\ ax + b, & \text{si } x > c \end{cases}$$

(a) Determina a y b en función de c para que f sea derivable en c .

Resolución

Si $x \neq c$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < c \\ a, & \text{si } x > c \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) = c^2$; $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = ac + b$. Para que sea continua en $x = c$ debe ser $b = c^2 - ac$

$\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = 2c$; $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = a$. Para ser derivable en $x = c$ debe ser $a = 2c$

Como $a = 2c$, sustituyendo $b = c^2 - 2cc = -c^2$

Conclusión: para que f sea derivable en $x = c$ debe ser $a = 2c$, $b = -c^2$.

(b) Para $c = 2$ y sabiendo que f es derivable en 2, halla un punto del intervalo $[1, 3]$ en el que la tangente a la gráfica de f sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

Resolución

Si $c = 2$, como f es derivable en 2, entonces $a = 2 \cdot 2 = 4$, $b = -2^2 = -4$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 2 \\ 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Recordemos el teorema del valor medio de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto $r \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(r)(b - a)$ ó sea $f'(r) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geométricamente significa que hay al menos un $r \in (a, b)$ (punto de la gráfica $P(r, f(r))$) tal que la recta tangente en $x = r$ es paralela a la recta que pasa por A y B, siendo $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

Al ser f derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange.

Por tanto, existe al menos un punto $r \in (1, 3)$ tal que $f'(r) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ que es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$. Observa que $f(3) = 4 \cdot 3 - 4 = 8$, $f(1) = 1^2 = 1$

Sustituyendo queda que $2r = \frac{7}{2}$ ó $4 = \frac{7}{2}$ (imposible). Despejando, $r = \frac{7}{4} = 1,75 \in [1, 3]$

18.- ¿Cómo hay que doblar un trozo de alambre de 4 metros de longitud para que forme un rectángulo cuya área sea lo más grande posible?

Resolución

Si x, y son las dimensiones del rectángulo, entonces $2x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - x$

Función a maximizar: $f(x) = A(\text{rectángulo}) = xy = x(2 - x) = 2x - x^2$

$f'(x) = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f''(x) = -2$; $f''(1) = -2 < 0$. Luego, para $x = 1$ el área es máxima.

En este caso, $y = 2 - 1 = 1$ obteniéndose un cuadrado de 1 m de lado.

Es decir el alambre hay que doblarlo en trozos de 1 m de longitud.

19.- Al aplicar integración por partes para evaluar $\int f(x) \sin x \, dx$, donde f es una cierta función

derivable, se obtiene $\int f(x) \sin x \, dx = -f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$.

Sabiendo que $f(1) = 2$, encuentra la expresión de $f(x)$.

Resolución

Aplicando la integración por partes, $[u = f(x) \quad f'(x) dx \quad dv = \sin x dx \quad v = -\cos x]$

$\int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x dx$ que debe ser igual a

$$-f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x dx$$

Por tanto, $f'(x) = 3x^2$ y, por el teorema fundamental del cálculo integral $f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + k$

Como $f(1) = 2$, entonces $1^3 + k = 2, k = 1$. La función que se pide es $f(x) = x^3 + 1$.

20.- Determina el área limitada por la curva $y = e^x - x$, su tangente en el punto $(1, e - 1)$ y el eje OY.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $P(a, f(a))$

es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $f(x) = e^x - x, a = 1, f(a) = f(1) = e - 1$

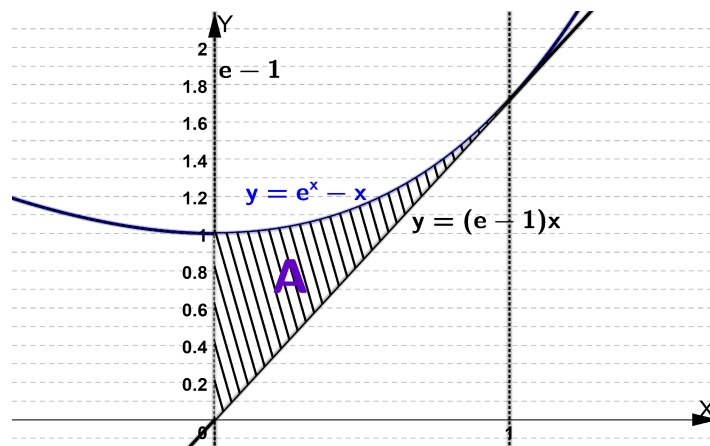
$$f'(x) = e^x - 1, f'(a) = f'(1) = e^1 - 1 = e - 1$$

La recta tangente es $rtg: y = (e - 1)(x - 1) + e - 1$; $rtg: y = (e - 1)x$

Por otra parte, $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $f(0) = e^0 - 0 = 1, f''(x) = e^x > 0, f''(0) = e^0 = 1 > 0$

Esto significa que f es convexa y su mínimo es $(0, 1)$ que coincide con el punto de corte con el eje Y

Un esbozo del recinto limitado por la curva y su tangente en el punto $(1, e - 1)$ sería:



$$\text{El área que se pide es } A = \int_0^1 [e^x - x - (e - 1)x] dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx.$$

Una primitiva es $p(x) = e^x - \frac{ex^2}{2} = \frac{2e^x - ex^2}{2}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(1) - p(0) = \frac{2e^1 - e \cdot 1^2}{2} - \frac{2e^0 - e \cdot 0^2}{2} = \frac{e-2}{2} \cong 0,359 \text{ u}^2.$$

21.-

(a) Estudia, según los valores del parámetro a , la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Resolución

Si $x \neq 2$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } x < 2 \\ -2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a - 2^2 = a - 4 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2 \text{ si se cumple } 2a + 4 = a - 4, a = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2 \cdot 2 + a = a + 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -2 \cdot 2 = -4 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 2 \text{ si se cumple } a + 4 = -4, a = -8$$

cumple $a + 4 = -4, a = -8$

Conclusión: para $a = -8$ f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y si $a \neq -8$ f sólo es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

(b) ¿Hay algún valor de a para, el que se pueda aplicar el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[1, 3]$? En caso afirmativo, halla el punto cuya existencia asegura dicho teorema.

Resolución

Recordemos el teorema del valor medio de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Si $a = -8, f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x, & \text{si } x \leq 2 \\ -8 - x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y $f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & \text{si } x < 2 \\ -2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Al ser f derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange. Por tanto, existe al menos un punto $c \in (1, 3)$ tal que $f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1)$.

$$\text{Observa que } f(3) = -8 - 3^2 = -17, f(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 = -7 \Rightarrow -17 - (-7) = f'(c) \cdot 2 \Rightarrow f'(c) = -5$$

$$\text{Sustituyendo, } 2c - 8 = -5 \Rightarrow c = \frac{3}{2} = 1,5 \in (1, 3) \quad \text{ó} \quad -2c = -5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} = 2,5 \in (1, 3)$$

22.- Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 2| |x - 2|$

(a) Determina los puntos donde f es derivable y halla sus máximos y mínimos locales.

Resolución

Usando la definición del valor absoluto, $f(x) = |x^2 - 4|$ y

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \leq -2 \text{ ó } x \geq 2 \\ 4 - x^2, & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}$ porque las funciones polinómicas y la función valor absoluto lo son.

Si $x \neq -2, x \neq 2$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables siendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < -2 \text{ ó } x > 2 \\ -2x, & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \cdot (-2) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -2 \cdot (-2) = 4. \text{ Luego, } f \text{ NO es derivable en } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -2 \cdot 2 = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 2 \cdot 2 = 4. \text{ Luego, } f \text{ NO es derivable en } x = 2$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$ pero sólo es derivable en $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Mínimo local: $x = -2, y = f(-2) = |(-2)^2 - 4| = 0$, punto $(-2, 0)$.

Máximo local: $x = 0, y = f(0) = |0^2 - 4| = 4$, punto $(0, 4)$.

Mínimo local: $x = 2, y = f(2) = |2^2 - 4| = 0$, punto $(2, 0)$.

(b) Calcula $\int_0^3 2f(x) dx$

Resolución

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

$$I = \int_0^3 2f(x)dx = \int_0^2 2f(x)dx + \int_2^3 2f(x)dx = \int_0^2 (8 - 2x^2) dx \stackrel{I_1}{=} + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx \stackrel{I_2}{=}$$

Para I_1 , una primitiva de la función a integrar es $p(x) = 8x - \frac{2x^3}{3} = \frac{24x - 2x^3}{3}$

Por la regla de Barrow, $I_1 = p(2) - p(0) = \frac{24 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3}{3} - \frac{24 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3}{3} = \frac{32}{3}$

Para I_2 , una primitiva de la función a integrar es $q(x) = \frac{2x^3}{3} - 8x = \frac{2x^3 - 24x}{3}$

Por la regla de Barrow, $I_2 = q(3) - q(2) = \frac{2 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3}{3} - \frac{2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2}{3} = \frac{14}{3}$

Luego, $I = \int_0^3 2f(x)dx = I_1 + I_2 = \frac{32}{3} + \frac{14}{3} = \frac{46}{3} \cong 15,33$

23.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 + (x - 1)^4(x + 2)^3$.

(a) Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-2, 1)$

Resolución

$$f'(x) = 4(x - 1)^3(x + 2)^3 + 3(x - 1)^4(x + 2)^2 = (x - 1)^3(x + 2)^2(4x + 8 + 3x - 3)$$

$$f'(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(7x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2, x = \frac{-5}{7} \cong -0,7 \in (-2, 1)$$

(b) Demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ sólo tiene una solución menor que -2 .

Resolución

Para $x < -2$, $f'(x) > 0$. Luego f es creciente en $(-\infty, -2)$

Como $f(-2) = 5 + (-2 - 1)^4(-2 + 2)^3 = 5 > 0$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ al ser f continua, por el teorema de Bolzano existe un único $c < -2$ tal que $f(c) = 0$. Por tanto, c es la única solución de la ecuación, $c < -2$.

(c) Demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene ninguna solución mayor que 1 .

Resolución

Para $x > 1$, $f'(x) > 0$. Luego f es creciente en $(1, +\infty)$

Como $f(1) = 5 + (1 - 1)^4(1 + 2)^3 = 5 > 0$ y $f(x) = +\infty$ al ser f continua, debe ser $f(x) > 0$ para $x > 1$. Por tanto, la ecuación no tiene ninguna solución mayor que 1.

24.- De una función f se sabe que su segunda derivada es la función g dada por $g(x) = x + 1$. También se conoce que la gráfica de f pasa por el punto $(2, 1)$ y que en ese punto su recta tangente es la de ecuación $3x - y - 5 = 0$. Calcula, de manera razonada, la función f .

Resolución

La tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 1)$ es $y = 3x - 5$. Luego, $f'(2) = 3$ y $f(2) = 1$

Por el teorema fundamental del cálculo integral, $f'(x) = \int g(x) dx = \int (x + 1) dx = \frac{x^2}{2} + x + a$

Es decir, $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{2} + a$. Como $f'(2) = 3$, entonces $\frac{2^2 + 2 \cdot 2}{2} + a = 3 \Rightarrow a = -1$

Nos queda $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{2} - 1 = \frac{x^2 + 2x - 2}{2}$. Por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x^2 + 2x - 2}{2} dx = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x}{2} + b = \frac{x^3 + 3x^2 - 6x}{6} + b.$$

Como $f(2) = 1$ entonces $\frac{2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2}{6} + b = 1 \Rightarrow b = \frac{-2}{6}$. Luego, $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 2}{6}$

25.- Determina las asíntotas de la función f definida para $x \neq 0$ por $f(x) = x e^{1/x}$.

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0. e^{1/0^-} = 0. e^{-\infty} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Veamos si se puede aplicar la regla

$$\text{de L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Se puede aplicar. Por tanto, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, f tiene en $x = 0$ la A.V. : $x = 0$ (eje Y)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty. e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty. 1 = +\infty. \text{ Luego, no hay asíntota horizontal en } +\infty.$$

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = 1$$

$[f(x) - mx] = \left(x e^{\frac{1}{x}} - x\right) x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\text{Veamos si podemos aplicar L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

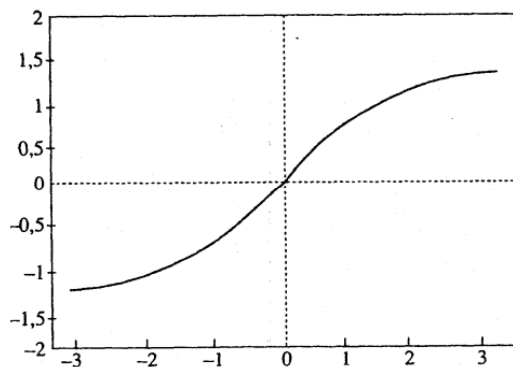
Se puede aplicar. Por tanto, $n = 1$. Luego, la asíntota oblicua en $+\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x + 1$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = xe^{\frac{1}{x}} - (x + 1) = xe^{\frac{1}{x}} - x - 1$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

26.- El gráfico de la función derivada de una cierta función f es la de la figura:



(a) ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $f(x) = 0$?

(b) Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones distintas, ¿pueden éstas ser del mismo signo?

(c) Enuncia alguno de los teoremas importantes que utilices en alguno de los apartados anteriores.

Justifica la respuesta de los apartados (a) y (b).

Resolución

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$ (f decreciente) y en $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0$ (f creciente) $\Rightarrow f$ tiene un mínimo en $x = 0$

f' es creciente $\Rightarrow f$ es convexa.

Luego, $f(x) = 0$ puede tener 0, 1 ó 2 soluciones. No tendría solución si $f(0) > 0$, tendría una solución si $f(0) = 0$ y tendría dos soluciones si $f(0) < 0$

Si tuviera dos soluciones positivas a y b , por el teorema de Rolle, que dice si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Entonces la gráfica de f' cortaría al eje X en $c > 0$, cosa que no ocurre.

Razonamiento similar si tuviera dos soluciones negativas.

Luego, $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones del mismo signo

27.- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} - f'''(0)\frac{x^3}{6}}{x^2}$ en cada uno de los casos siguientes:

$$(a) f(x) = \sin x \quad (b) f(x) = \left(x + x^2\right) \left[\sin x + \frac{x^7 + 1 + \sin^2 x}{2 + x^2 + x} \right]$$

(Indicación: no es necesario calcular las derivadas de f)

Resolución

Veamos que el valor del límite es independiente de la función f . Siempre vale 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} - f'''(0)\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{f(0) - f(0) - f'(0)0 - f''(0)\frac{0^2}{2} - f'''(0)\frac{0^3}{6}}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación.

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} - f'''(0)\frac{x^3}{6}}{(x^2)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - f'''(0)\frac{x^2}{2}}{2x} = \frac{f'(0) - f'(0) - f''(0)0 - f'''(0)\frac{0^2}{2}}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[f'(x) - f'(0) - f''(0)x - f'''(0)\frac{x^2}{2} \right]'}{(2x)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{2} = \frac{f''(0) - f''(0) - f'''(0)0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

28.- Representa gráficamente las curvas cuyas ecuaciones son $y = x^4 - x^2$ e $y = x^2$ y determina el área de la región que limitan en el primer cuadrante.

Resolución

Como $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1 \Rightarrow$ la curva $y = f(x) = x^4 - x^2$ corta a los ejes en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$

También, $f(x) = x^4 = +\infty$

Por otra parte, $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \cong \pm 0,7$. Tabla de signos de $f'(x)$:

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Mínimo local: $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}, y = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{-1}{4}$, punto $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{4}\right)$.

Máximo local: $x = 0, y = 0^4 - 0^2 = 0$, punto $(0, 0)$.

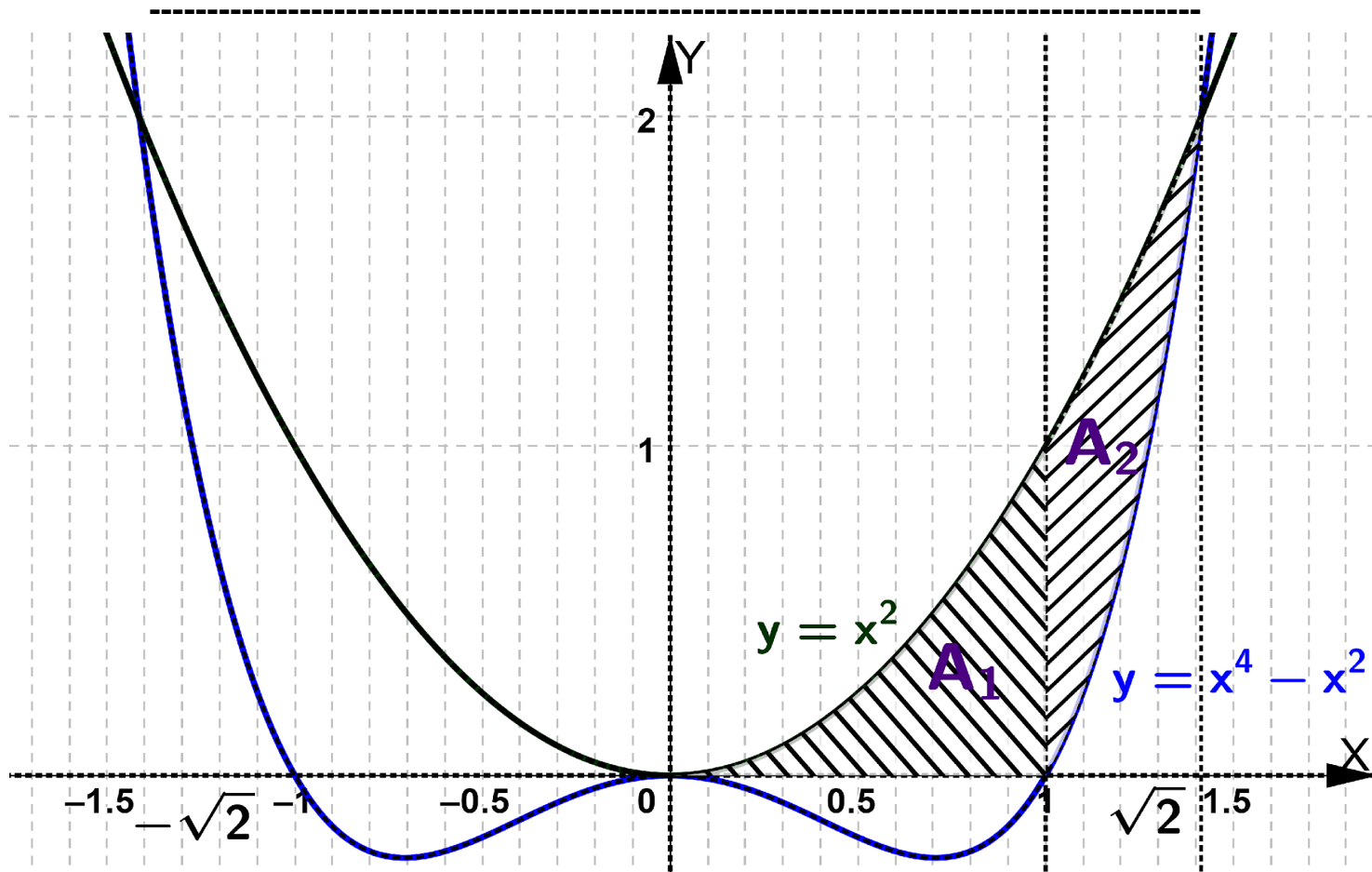
Mínimo local: $x = \sqrt{\frac{1}{2}}, y = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{-1}{4}$, punto $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{-1}{4}\right)$.

Puntos de corte entre las curvas: $\{y = x^4 - x^2, y = x^2\}; x^4 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = 0$

$x = 0, y = 0^2 = 0$, punto $(0, 0)$; $x = \sqrt{2} \cong 1,4, y = (\sqrt{2})^2 = 2$, punto $(\sqrt{2}, 2)$

$x = -\sqrt{2} \cong -1,4, y = (-\sqrt{2})^2 = 2$, punto $(-\sqrt{2}, 2)$

Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$; $A_1 = \int_0^1 x^2 dx$, $A_2 = \int_1^{\sqrt{2}} [x^2 - (x^4 - x^2)] dx = \int_1^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4) dx$

Para A_1 , una primitiva de x^2 es $p(x) = \frac{x^3}{3}$. Por la regla de Barrow, $A_1 = p(1) - p(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Para A_2 , una primitiva de $2x^2 - x^4$ es $q(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} = \frac{10x^3 - 3x^5}{15}$. Por la regla de Barrow,

$$A_2 = q(\sqrt{2}) - q(1) = \frac{10(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^5}{15} - \frac{10 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^5}{15} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{15}$$

Por tanto, el área sería $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{8\sqrt{2} - 7}{15} = \frac{8\sqrt{2} - 2}{15} \cong 0,62 u^2$

29.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. Sea P el punto de corte de la gráfica de f con su asíntota. Determina la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

Resolución

Como $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x , f es continua en $\mathbb{R}$ y no hay asíntotas verticales.

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$. Luego, f NO tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 + 2x}{x^3 + x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$[f(x) - mx] = \left(\frac{x^3 + 2x}{x^3 + x} - x \right) \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Luego, la asíntota oblicua en $\pm\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x$

Puntos de corte entre gráfica de f y su asíntota: $\{y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} \mid y = x\} ; \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x \Rightarrow$

$$x^3 + 2x = x^3 + x \Rightarrow x = 0$$

El punto de corte es $P(0, 0)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $P(a, f(a))$

es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $a = 0$; $f(a) = f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} ; f'(a) = f'(0) = \frac{0^4 + 0^2 + 2}{(0^2 + 1)^2} = 2$$

$$rtg: y = 2(x - 0) + 0 ; rtg: y = 2x$$

30.- En el intervalo $[-4, 4]$ se define la función F mediante $F(x) = \int_0^x \sqrt{16 - t^2} dt$

(a) ¿Cuánto vale $F'(2)$? Enuncia alguno de los teoremas importantes que utilices.

(b) ¿Cuánto vale $F(4)$? (Indicación: haz el cambio de variable $t = 4 \sin u$ y ten en cuenta que $2\cos^2 u = 1 + \cos(2u)$)

(c) Interpreta geométricamente la función F .

Resolución

Como $f(t) = \sqrt{16 - t^2}$ es continua en $[-4, 4]$ (nótese que $16 - t^2 \geq 0$)

Por el teorema fundamental del cálculo integral F es continua y derivable en $[-4, 4]$ siendo

$$F'(x) = \sqrt{16 - x^2}. \text{ Luego, } F'(2) = \sqrt{16 - 2^2} = \sqrt{12}$$

$$F(4) = \int_0^4 \sqrt{16 - t^2} dt. \text{ Haciendo el cambio de variable } t = 4 \sin u ; dt = 4 \cos u du$$

$$\text{Si } t = 0, 0 = 4 \sin u \rightarrow u = 0 \text{ y si } t = 4, 4 = 4 \sin u \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Sustituyendo, } F(4) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16 - 16 \sin^2 u} 4 \cos u du = \int_0^{\pi/2} 16u du = \int_0^{\pi/2} 16 \frac{1 + \cos(2u)}{2} du$$

Una primitiva de la función integrando es $p(u) = 8u + 8 \frac{\sin(2u)}{2} = 8u + 4\sin(2u)$. Por Barrow,

$$F(4) = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = 8 \cdot \frac{\pi}{2} + 4\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - [8 \cdot 0 + 4\sin(2 \cdot 0)] = 4\pi \approx 12,566$$

Geométricamente $F(x)$ corresponde al área limitada por la curva $y = f(t)$ en el intervalo $[0, x]$

31.- Demuestra que la ecuación $xe^x = 2$ sólo tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$.

Enuncia los teoremas importantes que utilices.

Resolución

Para probar que tiene solución usamos el teorema de Bolzano que dice: si f es continua en $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(x) = xe^x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas, en particular lo es en $[0, 1]$; $f(0) = 0e^0 - 2 = -2 < 0$ y $f(1) = 1e^1 - 2 \cong 0,7 > 0$.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $ce^c - 2 = 0 \Rightarrow ce^c = 2$. Luego, c es una solución de la ecuación.

Para demostrar que la solución es única vamos a usar el teorema de Rolle: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $k \in (a, b)$, tal que $f'(k) = 0$. Si hubiese dos soluciones, a y $b \in (0, 1)$, entonces $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, existiría un $k \in (a, b)$ tal que $f'(k) = 0$. Como $f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x > 0$ entonces $0 = f'(k) > 0$ (imposible).

Conclusión: No puede haber 2 soluciones. Hay solo una.

32.-

(a) Determina las constantes a y b de manera que la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln \ln x - 1, & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ ax + b, & \text{si } e < x \leq e^2 \end{cases}$$

verifique las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[1, e^2]$.

Resolución

Recordemos el teorema del valor medio de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Si $x \neq e$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

$$\text{siendo } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } 1 \leq x < e \\ a, & \text{si } e < x < e^2 \end{cases}$$

Para que f verifique las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[1, e^2]$ debería ser continua y derivable en $x = e$.

$$\text{Para que sea continua en } x = e \text{ debe ser } f(x) = f(x) \Rightarrow \ln \ln e - 1 = ae + b \Rightarrow ae + b = 0$$

$$\text{Para que sea derivable en } x = e \text{ debe ser } f'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow a = \frac{1}{e}$$

$$\text{Sustituyendo, } \frac{1}{e}e + b = 0 \Rightarrow b = -1. \text{ Conclusión: debe ser } a = \frac{1}{e}, b = -1$$

(b) Encuentra algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los extremos de la curva.

Resolución

Geométricamente significa que hay al menos un $c \in (a, b)$ (punto de la gráfica $P(c, f(c))$) tal que la recta tangente en $x = c$ es paralela a la cuerda AB , siendo $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

$$f(e^2) - f(1) = f'(c)(e^2 - 1); f(x) = \begin{cases} \ln \ln x - 1, & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{e} - 1, & \text{si } e < x \leq e^2 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } 1 \leq x < e \\ \frac{1}{e}, & \text{si } e < x < e^2 \end{cases}$$

$$\text{Sustituyendo, } \frac{e^2}{e} - 1 - (\ln \ln 1 - 1) = e = \frac{1}{c}(e^2 - 1) \Rightarrow c = \frac{e^2 - 1}{e} \text{ ó } e = \frac{1}{e}(e^2 - 1) \text{ (imposible)}$$

$$\text{Como } c = \frac{e^2 - 1}{e} \cong 2,4 < e, f(c) = f\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right) = \left[\ln \ln \left(\frac{e^2 - 1}{e}\right) - 1\right] \cong -0,1. \text{ El punto es } P(2,4; -0,1)$$

33.- Determina todas las funciones f de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$, y que verifican $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Alguna de las funciones determinadas anteriormente verifica $f(0) = f(1) = 0$? Razona las respuestas.

Resolución

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$0 = f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$0 = f'(1) = 3a1^2 + 2b1 + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

Restando las ecuaciones, $4b = 0 \Rightarrow b = 0$. Como $3a + c = 0$, $c = -3a \Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax + d$

Veamos si alguna de las funciones anteriores cumple que $f(0) = f(1) = 0$:

$$f(0) = a0^3 - 3a0 + d = d ; f(1) = a1^3 - 3a1 + d = d - 2a. \text{ Para que se cumpla debe ser } d = d - 2a = 0$$

Luego, $d = 0$, $a = 0$. Pero como $a \neq 0$, ninguna función de las anteriores cumple $f(0) = f(1) = 0$

34.- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los extremos relativos y absolutos de la función $f(x)$ dada por $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ en el intervalo cerrado en el que está definida.

Resolución

$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Luego, f está definida en el intervalo $[-2, 2]$.

$$f'(x) = 1\sqrt{4-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \cong \pm 1,41$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-2, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

f es decreciente en $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y creciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Mínimo relativo: $x = -\sqrt{2}$, $y = f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4 - (-\sqrt{2})^2} = -2$, punto $(-\sqrt{2}, -2)$

Máximo relativo: $x = \sqrt{2}$, $y = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = 2$, punto $(\sqrt{2}, 2)$

Evaluamos f en los extremos del intervalo: $f(-2) = -2\sqrt{4 - (-2)^2} = 0$, $f(2) = 2\sqrt{4 - 2^2} = 0$

Mínimo absoluto: $(-\sqrt{2}, -2)$; máximo absoluto: $(\sqrt{2}, 2)$

35.- Calcula la función $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cuya función derivada $f'(x)$ viene dada por $f'(x) = \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$ y verifica $f(2) = \ln(4)$

Resolución

$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$. Hallando la forma mixta de la fracción obtenemos,

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x + \frac{-x - 1}{x^3 - x^2}$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{-x-1}{x^3-x^2} = \frac{-x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

Multiplicando los dos miembros por $x^2(x-1)$, tenemos $-x-1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$.

Para $x = 0$, sustituyendo, $-1 = -B$, de donde $B = 1$; Para $x = 1$, sustituyendo, $-2 = C$

Para $x = 2$, sustituyendo, $-3 = 2A + B + 4C = 2A + 1 - 8$, de donde $A = 2$

$$f(x) = \int \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| - \frac{1}{x} - 2 \ln |x-1| + k.$$

$$\text{Como } f(2) = \ln 4 = 2 \ln 2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} + 2 \ln |2| - \frac{1}{2} - 2 \ln |2-1| + k = 2 \ln 2 \Rightarrow k = \frac{-5}{2}$$

$$\text{La función que se pide es } f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| - \frac{1}{x} - 2 \ln |x-1| - \frac{5}{2}$$

36.- Determina un polinomio de segundo grado p sabiendo que verifica las tres condiciones siguientes:

(i) $p(2) = p(-2) = 0$ (ii) tiene un máximo relativo en $x = 0$ y (iii) el área de la región encerrada por el eje OX y la curva $y = p(x)$ es 32.

Resolución

$$p(x) = ax^2 + bx + c, p'(x) = 2ax + b$$

Tiene un máximo en $x = 0$, $p'(0) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b = 0$, $b = 0$. Queda $p(x) = ax^2 + c$

$$\text{Como } p(2) = p(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + c = a2^2 + c = 0 \Rightarrow c = -4a. \text{ Queda } p(x) = ax^2 - 4a.$$

$$p(x) = ax^2 - 4a = a(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 2.$$

$$\text{El área, por simetría, es } 32 = A = 2 \int_0^2 (ax^2 - 4a) dx = \int_0^2 (2ax^2 - 8a) dx$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = \frac{2ax^3}{3} - 8ax = \frac{2ax^3 - 24ax}{3}.$$

Por la regla de Barrow, el área es

$$32 = p(2) - p(0) = \frac{2a2^3 - 24a2}{3} - \frac{2a0^3 - 24a0}{3} = \frac{-32a}{3} \Rightarrow a = -3$$

Por tanto, el polinomio es $p(x) = -3x^2 + 12$

37.-

(a) Determina en qué punto la recta $y = \frac{x}{e}$ es tangente a la curva $y = \ln x$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $P(a, f(a))$

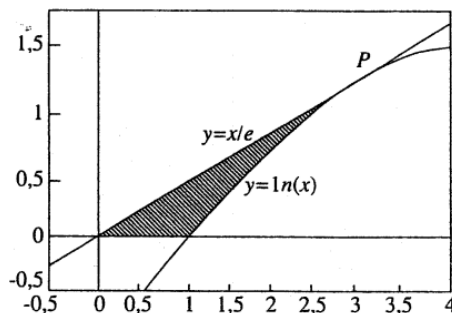
es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $f(x) = \ln x$

$P(a, \ln a) =$ punto de tangencia ; $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{e} \Rightarrow a = e$ y $P(e, 1)$, $f(a) = f(e) = \ln e = 1$

La recta tangente es $rtg: y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$; $rtg: y = \frac{x}{e}$

Conclusión: el punto que se pide es $P(e, 1)$

(b) Calcula el área del recinto rayado en la siguiente figura en la que P representa el punto de tangencia entre las curvas del apartado (a).



Resolución

El área que se pide es $A = \int_0^e \frac{x}{e} dx + \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln \ln x \right) dx = \int_0^e \frac{x}{e} dx - \int_1^e \ln \ln x dx$.

Una primitiva de $\frac{x}{e}$ es $p(x) = \frac{x^2}{2e}$

Hallamos una primitiva de $\ln x$ aplicando la integración por partes, $\left[u = \ln \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right]$

$\int \ln \ln x dx = x \ln \ln x - \int dx = x \ln \ln x - x + k = x(\ln \ln x - 1) + k$. Una primitiva es

$q(x) = x(\ln \ln x - 1)$.

Por la regla de Barrow,

$$A = p(e) - p(0) + q(e) - q(1) = \frac{e^2}{2e} - \frac{0^2}{2e} + e(\ln \ln e - 1) - 1(\ln \ln 1 - 1) = \frac{e}{2} + 1 \cong 0,36 u^2.$$

38.- Sea f la función definida por $f(x) = (x - 1) |x - 1|$.

(a) ¿Puede aplicarse el teorema de Rolle a f en el intervalo $[0, 2]$?

Resolución

El teorema de Rolle dice: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

$f(0) = -(0 - 1)^2 = -1 \neq f(2) = (2 - 1)^2 = 1$. Luego, no se puede aplicar

(b) ¿Y a la función f' ?

Resolución

Usando la definición de valor absoluto, $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, continua en $\mathbb{R}$ pues la función valor

absoluto y las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$

Si $x \neq 1$, f es derivable (las funciones polinómicas lo son) siendo

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2(1-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2(1-1) = 0 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1$$

Por tanto, f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1), & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = g(x)$

Veamos si podemos aplicar el teorema de Rolle a la función g en el intervalo $[0, 2]$:

$$g(0) = -2(0-1) = 2 = g(2) = 2(2-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2(1-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 2(1-1) = 0 \Rightarrow g \text{ es continua en } x = 1$$

Luego, g es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 2]$

Para $x \neq 1$, g es derivable siendo $g'(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = 2 \Rightarrow g \text{ NO es derivable en } x = 1 \Rightarrow g \text{ NO es derivable en } (0, 2)$$

Por tanto, NO se le puede aplicar el teorema de Rolle

(c) ¿Es simétrica la gráfica de f con respecto a algún punto?

Resolución

$$f(1+x) = \begin{cases} -(1+x-1)^2, & \text{si } 1+x < 1 \\ (1+x-1)^2, & \text{si } 1+x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(1-x) = \begin{cases} -(1-x-1)^2, & \text{si } 1-x < 1 \\ (1-x-1)^2, & \text{si } 1-x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = -f(1+x)$$

Luego, f es simétrica respecto del punto $(1, 0)$

39.- Sea f la función definida en $[0, +\infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + b, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 6x + c, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

(a) ¿Es f continua en todo el intervalo $[0, \infty)$ para $a = 4$, $b = 5$ y $c = -4$?

Resolución

Para $a = 4, b = 5$ y $c = -4, f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 5, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 6x - 4, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$
 Para $x \neq 1, x \neq 3$, f es continua porque las funciones polinómicas son continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 + 4 = 6 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 + 5 = 6 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 + 5 = 14 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 3$$

Respuesta. Sí.

(b) ¿Es f derivable en todo el intervalo $[0, \infty)$ para $a = 1, b = 2$ y $c = 3$?

Resolución

Para $a = 1, b = 2$ y $c = 3, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 2, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 6x + 3, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$
 Para $x \neq 1, x \neq 3$, f es continua y derivable porque las funciones polinómicas son continuas.
 Además, $f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x, & \text{si } 1 < x < 3 \\ 6, & \text{si } 3 < x \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 + 2 = 3 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 + 2 = 11 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 6 \cdot 3 + 3 = 21 \Rightarrow f$ NO es continua en $x = 3$ y, por tanto, tampoco derivable.

Respuesta: No, porque f no es derivable en $x = 3 \in [0, +\infty)$

40.- La curva $y(t) = \sqrt{1 + t^2} - t$ representa un río. En el punto $P(2, 0)$ hay una ciudad desde la que se desea construir una tubería rectilínea hasta el río.

(a) ¿En qué punto Q del río debe terminar la tubería para que ésta sea lo más corta posible?

Resolución

Sea $Q\left(t, \sqrt{1 + t^2} - t\right)$ el punto de la curva que busquemos.

La función a minimizar es

$$f(t) = \text{dist}^2(P, Q) = (t - 2)^2 + (\sqrt{1 + t^2} - t - 0)^2 = t^2 - 4t + 4 + 1 + t^2 - t$$

$$f(t) = 2t^2 - 5t + 5; f'(t) = 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}; f''(t) = 4; f''\left(\frac{5}{4}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } \frac{5}{4}$$

$$\text{El punto que se busca es } Q\left(\frac{5}{4}, \sqrt{1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{5}{4}, \sqrt{\frac{21}{16}}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{4}\right)$$

(b) Comprueba que en dicho punto Q la tubería es perpendicular al río.

Resolución

$$\text{Sea } g(t) = \sqrt{1 + t^2 - t}, g'(t) = \frac{2t-1}{2\sqrt{1+t^2-t}}; g'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2\frac{5}{4}-1}{2\sqrt{1+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{2\frac{\sqrt{21}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

(pendiente de la tangente al río en Q)

$$\text{Como } \vec{PQ} = \left(\frac{5}{4} - 2, \frac{\sqrt{21}}{4} - 0\right) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{\sqrt{21}}{4}\right), \text{ la pendiente de la tubería es } \frac{-\sqrt{21}}{3}$$

Al ser el producto de las pendientes $\frac{3}{\sqrt{21}} \cdot \frac{-\sqrt{21}}{3} = -1$, concluimos en que el río (en el punto Q) es perpendicular a la tubería.

41.- Sea f la función definida por $f(x) = \ln(1+x)$ y sea p(x) el polinomio dado

por $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^2}$

Resolución

$$\text{Observa que } p(0) = f(0) + f'(0)0 + \frac{1}{2}f''(0)0^2 = f(0); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^2} = \frac{f(0) - f(0)}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Indeterm.

$$\text{Aplicamos L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - p(x)]'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x} = \frac{f'(0) - f'(0) - f''(0)0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Indeterm.

Aplicamos de nuevo L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f'(x) - f'(0) - f''(0)x]'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{2} = \frac{f''(0) - f''(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{Luego, aplicando la regla de L'Hôpital, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^2} = 0.$$

Observa que el límite siempre vale 0, es indiferente la expresión algebraica que tenga la función f.

42.- Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = a + bx^2 + x^4$ y $g(x) = c - x^3$.

Calcula los valores de a, b, c de R de modo que las gráficas de f y g se corten en el punto (1, 1) y sean tangentes en dicho punto.

Resolución

$$f(x) = a + bx^2 + x^4 \quad f'(x) = 2bx + 4x^3; \quad g(x) = c - x^3 \quad g'(x) = -3x^2$$

$$\text{Como las gráficas se cortan en } (1, 1), \text{ entonces } f(1) = g(1) = 1 \Rightarrow a + b1^2 + 1^4 = c - 1^3 = 1$$

$$\text{Se obtiene, } c = 2 \text{ y } a + b = 0, b = -a. \text{ Luego, } f'(x) = -2ax + 4x^3 \text{ y } g'(x) = -3x^2$$

$$\text{Como las gráficas son tangentes en } (1, 1), \text{ entonces } f'(1) = g'(1) \Rightarrow -2a1 + 4 \cdot 1^3 = -3 \cdot 1^2 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

Por tanto, $a = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = 2$ y $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}x^2 + x^4$, $g(x) = 2 - x^3$

43.- Calcula el área del recinto limitado por las curvas cuyas ecuaciones son $x = y^2$, $x + 2y = 3$, $y = 0$, $x = 2$.

Resolución

La parábola $y^2 = x$ tiene las ramas hacia la derecha, el vértice es $(0, 0)$ y el eje de simetría es el eje X.

Cortes entre la parábola y la recta: $\{y^2 = x, x + 2y = 3\}; y^2 + 2y - 3 = 0$;

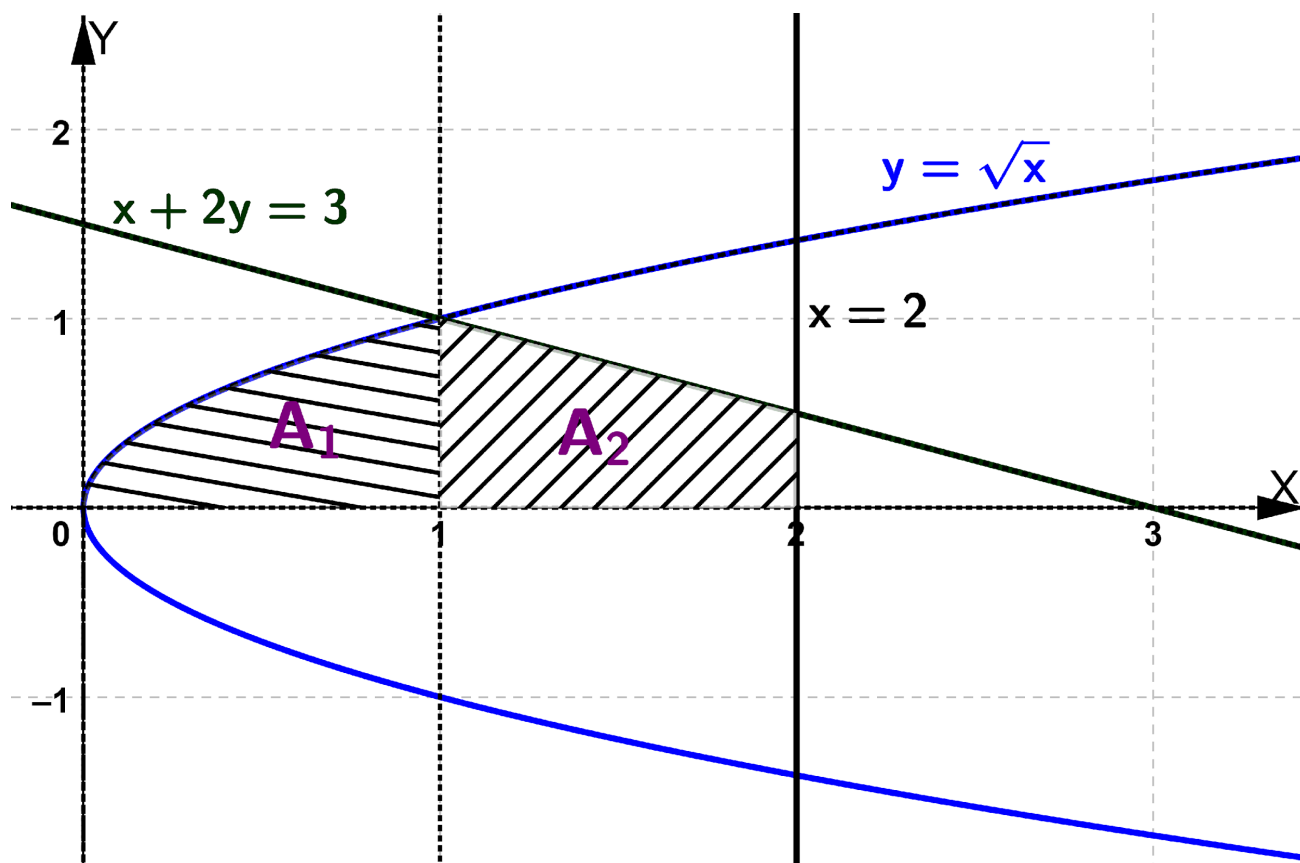
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$y = 1, x = 1, \text{ punto } (1, 1) \quad ; \quad y = -3, x = 9, \text{ punto } (9, -3)$$

$x = 2$ es la recta vertical que pasa por $(2, 0)$ e $y = 0$ es el eje X.

Para $x = 2$, en la rama positiva de la parábola $y = \sqrt{2}$ y en la recta $2 + 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Un esbozo del recinto sería:



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(1) - p(0) = \frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} = \frac{2}{3}$$

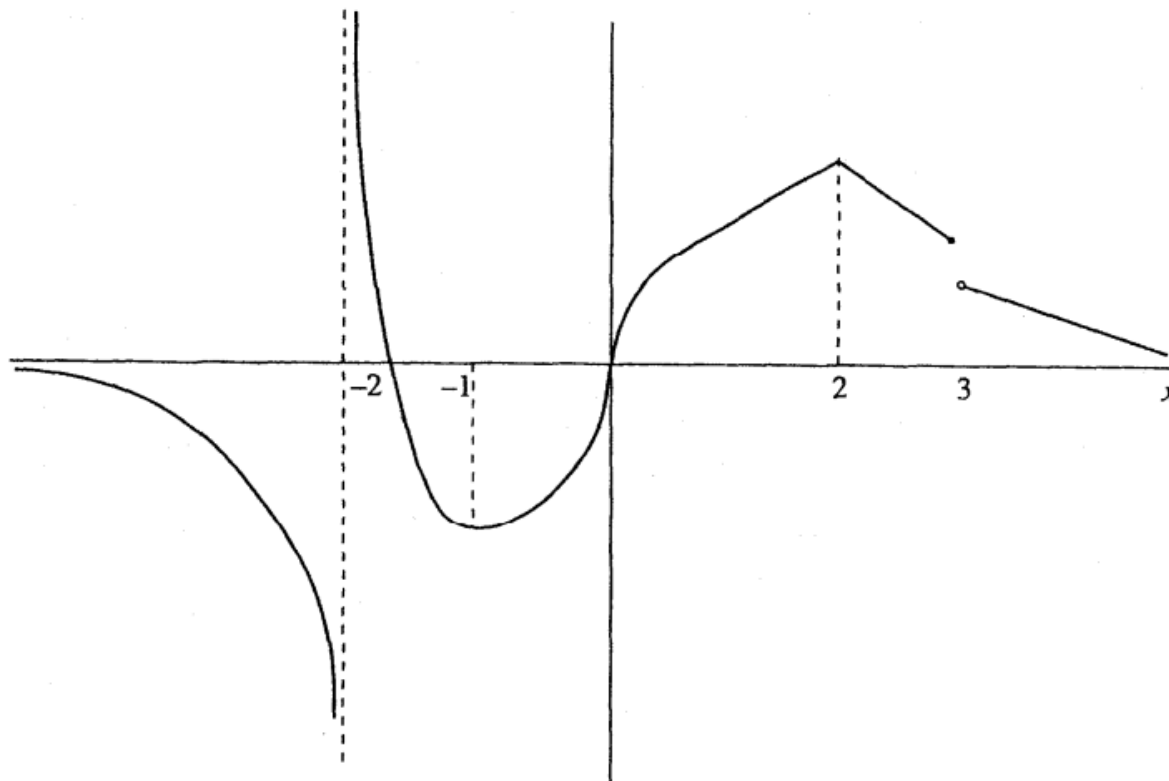
$$A_2 = \int_1^2 \frac{3-x}{2} \, dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } q(x) = \frac{3x - \frac{x^2}{2}}{2} = \frac{6x - x^2}{4}.$$

Por la regla de Barrow, $A_2 = q(2) - q(1) = \frac{6 \cdot 2 - 2^2}{4} - \frac{6 \cdot 1 - 1^2}{4} = \frac{3}{4}$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} \cong 1,42 \text{ u}^2$

44.-

(a) La gráfica de una función f es



Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

(i) ¿En qué puntos no es f continua?

Resolución

No es continua en $x = -2$ porque $\nexists f(-2)$. Además, tiene una discontinuidad de salto infinito

siendo $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

No es continua en $x = 3$ porque aunque $\exists f(3)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, tiene una

discontinuidad de salto finito

(ii) ¿En qué puntos no es f derivable?

Resolución

No es derivable en $x = -2$ (por no ser continua), $x = 0$ (la derivada en $x = 0$ es infinito porque su recta tangente es $x = 0$), $x = 2$ (por no coincidir las derivadas laterales pues no son iguales las tangentes) ni en $x = 3$ (por no ser continua).

(iii) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f ?

Resolución f es decreciente en $(-\infty, -1) - \{-2\} \cup (2, +\infty)$ y creciente en el intervalo $(-1, 2)$

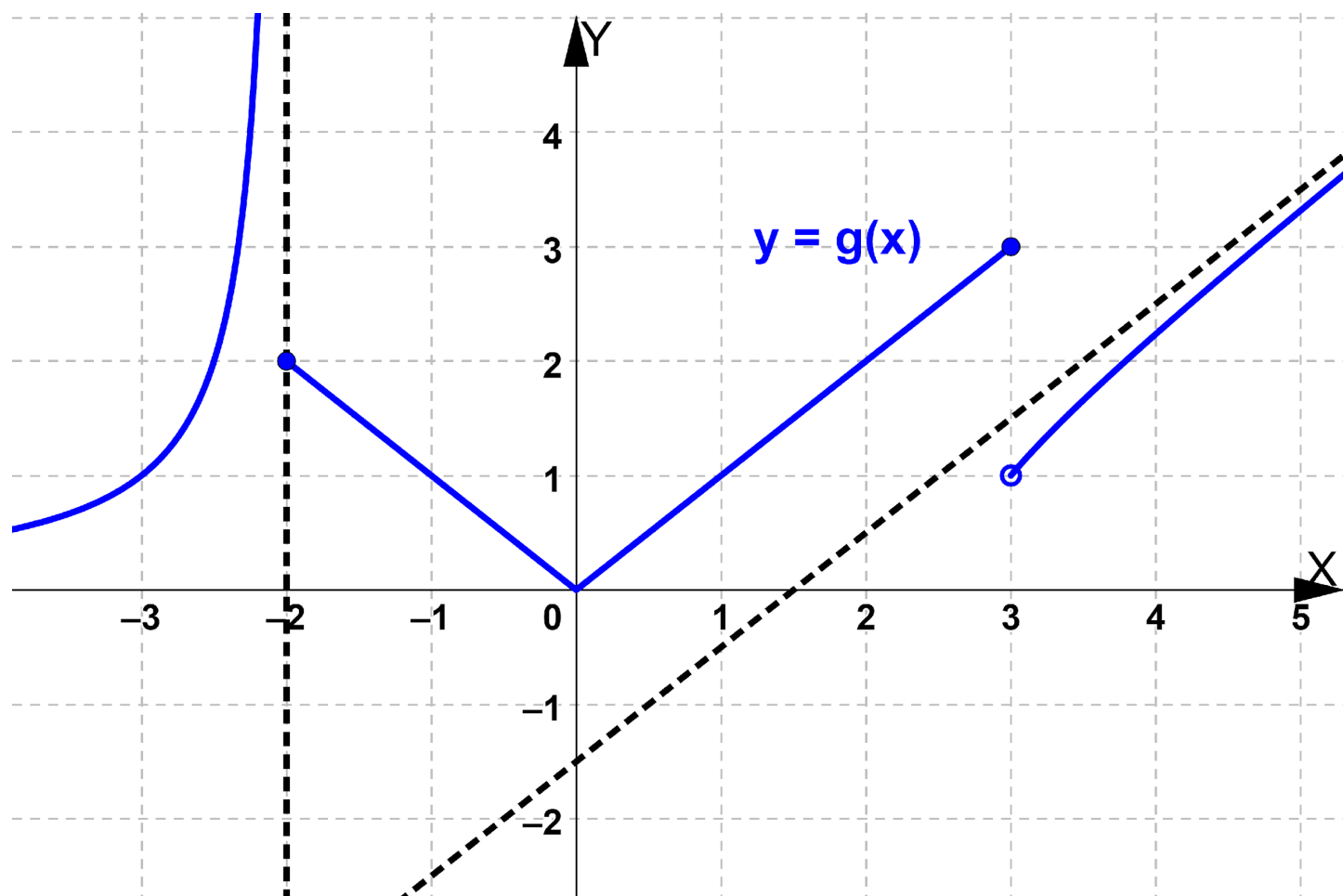
(iv) ¿Cuáles son los máximos absolutos y relativos de f en $[-3, 4]$?

Resolución Máximo relativo en $x = 2$, no hay máximo absoluto porque $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

(b) De una función g se sabe que es positiva y tiene derivada positiva en el intervalo $(-\infty, -2)$; que g tiene, tanto por la derecha como por la izquierda, una asíntota vertical en $x = -2$; que el mínimo absoluto de g se alcanza en $x = 0$ y vale $g(0) = 0$ pero g no es derivable en dicho punto; g es creciente en $[0, \infty)$ siendo continua en dicho intervalo salvo una discontinuidad de salto en $x = 3$ y que cuando $x \rightarrow +\infty$ tiene una asíntota oblicua. Teniendo en cuenta los datos anteriores, esboza la gráfica de g .

Resolución

Una posible gráfica de g podría ser la siguiente:



45.- Estudiar la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$

Resolución

Usando la definición de valor absoluto, $f(x) = \{-x^3, \text{ si } x < 0; x^3, \text{ si } x \geq 0\}$, continua en $\mathbb{R}$ pues la función valor

absoluto y las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, f es derivable (las funciones polinómicas lo son) siendo

$$f'(x) = \{-3x^2, \text{ si } x < 0; 3x^2, \text{ si } x > 0\}$$

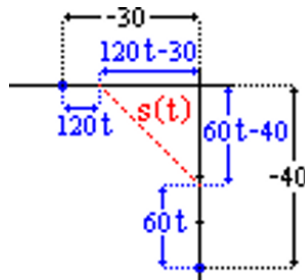
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3 \cdot 0^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 0$$

46.- Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable), dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente, a 40 y 30 km del punto de corte.

(a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.

Resolución

Transcurrido un tiempo t , la posición de las locomotoras vendrá dada por



Aplicando el teorema de Pitágoras, la distancia entre las locomotoras será:

$$s(t) = \sqrt{(120t - 30)^2 + (60t - 40)^2} = \sqrt{14400t^2 - 7200t + 900 + 3600t^2 - 4800t + 1600}$$

Operando y simplificando, $s(t) = \sqrt{18000t^2 - 12000t + 2500} = 10 \sqrt{180t^2 - 120t + 25}$

(b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

Resolución

$$s'(t) = 10 \frac{360t - 120}{2\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = \frac{1800t - 600}{\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = 0 \Leftrightarrow 1800t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Si $t < \frac{1}{3}$, $s'(t) < 0$ (s decreciente) y si $t > \frac{1}{3}$, $s'(t) > 0$ (s creciente)

Mínimo de s: $t = \frac{1}{3}$, $s\left(\frac{1}{3}\right) = 10 \sqrt{180\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 120\frac{1}{3} + 25} = 10\sqrt{5} \cong 22,36$

La distancia mínima es, aproximadamente, 22,36 km y se alcanza para $t = \frac{1}{3}h = 20 \text{ min}$

47.- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justificar la respuesta.

Resolución

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 2}{2}, x = -4, x = -2$$

Usando que la parábola $y = x^2 + 6x + 8$ es convexa, corta al eje X en -4 y -2 y la definición de valor absoluto, $f(x) = \{x^2 + 6x + 8, \text{ si } x \leq -4 \text{ ó } x \geq -2 - x^2 - 6x - 8, \text{ si } -4 < x < -2\}$, continua en R pues la función valor absoluto y las funciones polinómicas son continuas en R.

Si $x \neq -4, x \neq -2$, f es derivable (las funciones polinómicas lo son)

siendo $f'(x) = \{2x + 6, \text{ si } x < -4 \text{ ó } x > -2 - 2x - 6, \text{ si } -4 < x < -2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f'(x) = 2(-4) + 6 = -2 \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} f'(x) = -2(-4) - 6 = 2 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -2(-2) - 6 = -2 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = 2(-2) + 6 = 2 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = -2$$

Luego, hay dos puntos donde f no es derivables, $x = -4$, $x = -2$.

48.- Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = e^{x^2}$

Resolución

$$f'(x) = 2x e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0; \text{ Si } x < 0, f'(x) < 0 \text{ (f decreciente) y } x > 0, f'(x) > 0 \text{ (f creciente)}$$

Mínimo relativo: $x = 0, y = f(0) = e^{0^2} = 1$, punto $(0, 1)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$. Por tanto, el mínimo relativo también es absoluto y no hay máximos relativos ni absolutos.

49.- La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (en función del tiempo t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$.

a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil?

Resolución

Por el teorema fundamental del cálculo integral, la velocidad es

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(4 - \frac{t}{8}\right) dt = 4t - \frac{\frac{t^2}{2}}{8} + k = \frac{64t - t^2}{16} + k$$

Como para $t = 0$ el móvil está parado, entonces $v(0) = 0$. Luego, $\frac{64 \cdot 0 - 0^2}{16} + k = 0, k = 0$

$$v(t) = \frac{64t - t^2}{16} = 0 \Leftrightarrow 64t - t^2 = t(64 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } t = 64$$

b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo $(4, 8)$ y el espacio recorrido en ese intervalo. Hallar la función de posición de este móvil

Resolución

$$\text{La variación de velocidad sería } v(8) - v(4) = \frac{64 \cdot 8 - 8^2}{16} - \frac{64 \cdot 4 - 4^2}{16} = \frac{208}{16} = 13$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral, la función de posición del móvil es

$$e(t) = \int v(t) dt = \int \frac{64t - t^2}{16} dt = \frac{32t^2 - \frac{t^3}{3}}{16} + c = \frac{96t^2 - t^3}{48} + c$$

Como para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$, entonces $e(0) = 5$.

$$\text{Luego, } \frac{96 \cdot 0^2 - 0^3}{48} + c = 5, \quad c = 5 \quad \text{y} \quad e(t) = \frac{96t^2 - t^3}{48} + 5 = \frac{96t^2 - t^3 + 240}{48}$$