УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
Оргкомитета III (областного)
этапа республиканской олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилевского
облисполкома
__________________ С.В. Леонова
«30» ноября 2009 г.

Задания для II этапа республиканской олимпиады
по математике
12 декабря 2009 года

11 класс

1. Дан треугольник *ABC*. Пусть *M* – точка пересечения его медиан. На стороне *AC* выбраны две различные точки *K* и *N*. В точках *M, K* и *N* сидит по улитке. Время от времени одна из улиток переползает со своего места на какую-либо медиану или сторону треугольника *ABC*, двигаясь при этом по направлению, параллельному прямой, проходящей через точки, в которых находятся две другие улитки. Могут ли улитки в некоторый момент времени оказаться в точках *K*, *N* и *E,* где *E* – середина медианы, проведенной к стороне *BC*?

2. Имеются 9 палочек, длины которых различны и принимают целые значения от 1 до 9 см. Квадраты с какими сторонами и сколькими способами можно составить из этих палочек? (Не обязательно использовать все палочки; способы составления одного квадрата считаются разными, если используются разные палочки).

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ x+2y-3z=-14. \end{cases}$

4. В компьютер попал вирус. Действие вируса заключается в следующем. На жестком диске он создает m папок ($m > 1$). Далее, случайным образом выбирает несколько из них (количество выбранных папок каждый раз может меняться) и создает в каждой из выбранных папок еще по m папок. Остальные папки остаются пустыми. С вновь созданными папками вирус поступает аналогично. Данная процедура повторилась несколько раз, пока вирус не был заблокирован антивирусом. В результате действия вируса на диске было создано 2010 пустых папок и n непустых папок. Найдите значения m и n, если известно, что n является трехзначным числом.

5. Некоторое натуральное число имеет 6 делителей. Известно, что сумма всех делителей этого числа, исключая само число, равна 385, а сумма различных простых делителей этого числа кратна 12. Найти это натуральное число.

Указания к решению

11 класс

1. Ответ: нет, не могут.

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках, в которых находятся улитки в некоторый момент времени. Пусть одна из улиток переползает со своего места параллельно прямой, проходящей через точки, в которых находятся две другие улитки. Заметим, что высота треугольника, опущенная на сторону, соединяющую двух неподвижных улиток, остается прежней. Это означает, что площадь треугольника, образованного улитками, при перемещении улиток не меняется. Однако, очевидно, что площади треугольников *KNM* и *KNE* различны.

2. Ответ: квадраты со сторонами 7, 8, 9, 10, 11 сантиметров можно составить 9 способами.

Так как квадрат имеет четыре стороны, а все палочки имеют различную длину, то, очевидно, что наименьшая длина стороны квадрата не может быть меньше 7 см. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть такие разбиения чисел от 3 до 6, чтобы каждое число в них встречалось один раз (для 1 и 2 таких разбиений нет). Получаем

$$3 = 2 + 1;\ 4 = 1 + 3;\ 5 = 1 + 4 = 2 + 3;\ 6 = 1 + 5 = 2 + 4.$$

Кроме того, нельзя составить квадрат со стороной более 11 см, поскольку сумма длин всех палочек равна 45 см.

Таким образом, для получения заданного квадрата требуется, чтобы было не меньше трех вариантов разбиений данного числа, если имеется палочка с длиной равной этому числу, или чтобы было не меньше четырех разбиений данного числа, если такой палочки нет. Из палочек данного набора можно составить отрезки длиной 7, 8, 9, 10, 11 см следующими способами

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$$
$$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$$
$$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$$
$$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$$
$$11 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5.$$

Следовательно, из данного набора палочек можно сложить одним способом $\left(C_4^1\right)$ квадраты со сторонами 7, 8, 10, 11 см и пятью способами – квадрат со стороной 9 см $\left(C_5^4\right)$.

3. Ответ: (–1; –2; 3).

Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = -14$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$$

Последнее равенство возможно, только если $x = -1$, $y = -2$ и $z = 3$.

4. Ответ: $n = 286$, $m = 8$

Заметим, что создание в пустой папке m новых папок увеличивает общее количество пустых папок на $m - 1$ (1 пустая папка исчезает и появляются m новых). Связь между количеством непустых и пустых папок отобразим в таблице.

Число непустых папок	Число пустых папок
0	m
1	$m+(m-1) = 2m-1$
2	$2m-1+(m-1) = 3m-2$
3	$3m-2+(m-1) = 4m-3$
…	…
n	$(n+1)m-n = nm+m-n = 2010$

Итак, имеем уравнение:

$nm+m-n = 2010$;

$nm+m-n - 1= 2010 - 1$;

$m(n+1)-(n+1)=2009$;

$(n+1)(m-1)=2009$

Видно, что число $n + 1$ должно быть делителем числа 2009. Причем, так как n трехзначное число, то $n + 1$ будет либо также трехзначным числом или 1000 (при $n = 999$). Так как 2009 не кратно 1000, то $n + 1$ – трехзначное число. Выпишем все делители числа 2009. Поскольку $2009 = 7^2 \cdot 41$, то его делители:

1, 7, 41, 49, $7 \cdot 41 = 287$, 2009. Трехзначным является только 287.

Итак, $n + 1 = 287$, $m - 1 = 7$. Откуда $n = 286$, $m = 8$.

5. Ответ: искомое число равно 2009.

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, *где* p_1, p_2, …,$p_к$ *– различные простые делители числа n. Тогда количество делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой* $d(n)=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. *Например,* $24 = 2^3 \cdot 3^1$, *тогда* $d(24)=(3+1)(1+1)=8$. *Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.*

Искомое число n имеет 6 делителей, а поскольку $6 = 5 + 1$ или $6 = (1+1)\cdot(2+1)$, то оно может иметь следующее разложение на простые множители: $n = p^5$, или $n = pq^2$, где p и q – различные простые числа. Т. к. сумма различных простых делителей этого числа кратна 12, то первый случай не удовлетворяет условию задачи. Итак, $n = pq^2$. Выпишем делители числа n, за исключением самого числа: 1, p, q, q^2, pq.

Имеем: $1 + p + q + pq + q^2 = 385$

$p + q + pq + q^2 = 384$

$(p + q)(q + 1) = 384$ (*)

Т. к. сумма $p + q$ кратна 12, то $p + q = 12k,\ k \in N$.

Тогда $12k(q + 1) = 384$. Отсюда $k(q + 1) = 32$. Число $q + 1$ является делителем 32, причем $q + 1 > 2$. Возможны следующие случаи:

1) $q + 1 = 4$, $q = 3$. Из (*) имеем: $(p + 3) \cdot 4 = 384$, откуда $p = 93$ – не простое число.

2) $q + 1 = 8$, $q = 7$. Из (*) имеем: $(p + 7) \cdot 8 = 384$, откуда $p = 41$ – простое число

3) $q + 1 = 16$, $q = 15$ – не простое число.

4) $q + 1 = 32$, $q = 31$. Из (*) имеем: $(p + 31) \cdot 32 = 384$, откуда $p = -19 < 0$.

Условию задачи удовлетворяет только случай 2: $q = 7$, $p = 41$.

Значит $n = 41 \cdot 7^2 = 2009$.