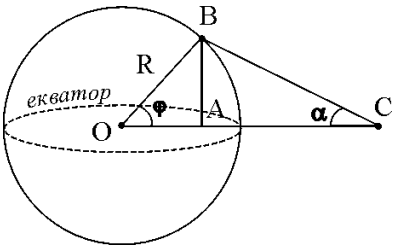
Розв'язки завдань ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з астрономії. 2020 рік. 10 клас

1.1 г,б,а,в
1.2 в,а,б,г
1.3 а
1.4 а
1.5 Плеяди – це зоряне скупчення, все інше – сузір'я
1.6 Калісто – це супутник, все інше – малі тіла Сонячної системи.
1.7 1-в, 2-д, 3-а, 4-б.
1.8 1-д, 2-г, 3-б, 4-в.
1.9 так, ні, ні, так, так.
1.10 ні, так, ні, ні, так.



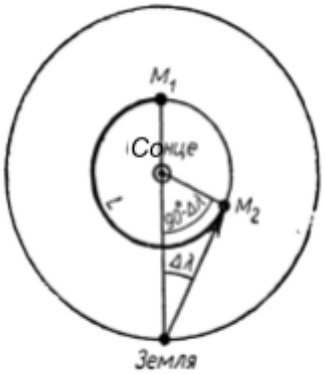
2. Нехай відстань від центра Землі r. З закону всесвітнього тяжіння $m\frac{\upsilon^2}{r} = G\frac{M \cdot m}{r^2}$ або $\upsilon^2 = G\frac{M}{r}$ (1), де M – масса Землі. Період обертання супутника T повинен становити 1 добу.

1 доба = 86400 с. $T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$ (2). З рівнянь 1,2 отримуємо $r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$. $r \approx 42240$ км.

Зобразимо ситуацію на малюнку. С – супутник, В – Рівне, α– шуканий кут.
ϕ – географічна широта, R – радіус Землі, $OC = r$ – відстань від супутника до центра Землі.

$AB = R \cdot \sin\varphi = 6370 \text{ км} \cdot \sin 50^0 \approx 4880$ км. $AO = R \cdot \cos\varphi = 6370 \text{ км} \cdot \cos 50^0 \approx 4095$ км.

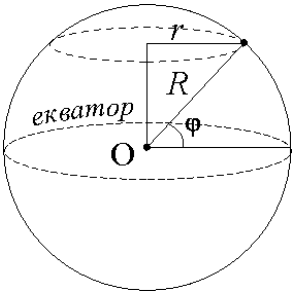
$AC = OC - AO = 42240 \text{ км} - 4095 \text{ км} = 38145$ км. $\text{tg}\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{4880}{38145} \approx 0{,}128$. $\alpha \approx 7{,}3^0$.



3. Меркурій рухається швидше ніж Земля ($\omega > \omega_0$). Зобразимо на малюнку Землю і Меркурій відносно неї в день t_1 верхнього сполучення (M_1) і в день t_2 найближчої найбільшої західної елонгації (M_2). За проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ Меркурій відносно Землі пройде дугу $L = M_1M_2$ з середнім добовим рухом

$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 4\frac{\text{град}}{\text{доба}} - 1\frac{\text{град}}{\text{доба}} = 3\frac{\text{град}}{\text{доба}}$. З малюнка видно, що $L = 180^0 + (90^0 - \Delta\lambda) = 270^0 - 20^0 = 250^0$.

Тоді $\Delta t = \frac{L}{\Delta\omega} = \frac{250^0}{3\frac{\text{град}}{\text{доба}}} \approx 83$ доби і найближча найбільша західна елонгація наступила в день t_2 = 26 листопада 2019 року.



4. Між Магаданом і Анкориджем, які лежать відповідно у східній і західній півкулях, різниця у місцевому часі складає 20 год (різниця довгот – 300^0, а 15^0 відповідають 1 годині різниці у часі). Відлік часу ведеться із заходу на схід, тому на момент вильоту літака з Анкориджа в Магадані було 4 год ранку, але вже 6 червня (слід пам'ятати про лінію зміни дат). Оскільки літак приземлився о 7.30 за місцевим часом Магадана, то політ триває 3,5 год. (7.30 – 4.00). Знайдемо довжину паралелі 60^0: Її радіус $r = R\cos\varphi$, де R – радіус Землі. Тоді довжина $s = 2\pi \cdot R\cos 60^0 \approx 20000$ км. Літак пролетить в градусній мірі

$360^0 - 300^0 = 60^0$. В кілометрах це становитиме $l = \frac{s}{360^0} \cdot 60^0 \approx 3333$ км. Поділивши цю відстань на тривалість польоту (3333:3,5), одержимо швидкість літака – приблизно 950 км/год.

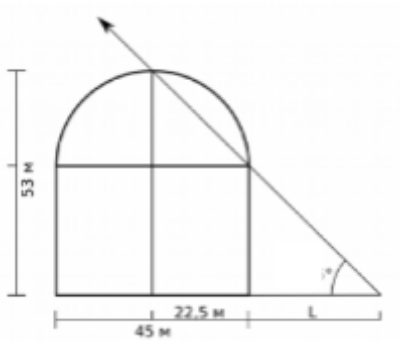
5. Оскільки Венера перебувала в найбільшій східній елонгації як для Землі, так і для Марса, то ці дві планети розташовувалися в напрямку, перпендикулярному радіусу-вектору Венери (див. малюнок). Кутову відстань Венери від Сонця на Землі під час найбільшої елонгації знайдемо з прямокутного трикутника *ЗВС*. *ЗС* = 1 а.о., *ВС* = 0,72 а.о.. $\sin\angle B3C = \frac{0,72}{1} = 0,72$. $\angle B3C \approx 46^0$. Отже, Марс знаходився на 134^0 від Сонця на захід. Відстань від Землі до Венери знайдемо також з трикутника *ЗВС*. $3B = \sqrt{3C^2 - BC^2} \approx 0,69$ а.о. Відстань від Марса до Венери знайдемо з трикутника *МВС*. $MB = \sqrt{MC^2 - BC^2} = \sqrt{1,52^2 - 0,72^2} \approx 1,34$ а.о. Тоді відстань від Землі до Марса 0,65 а.о.

6. Очевидно, що фотограф розташовується далеко від статуї, а також від Місяця (в порівнянні з їх основними розмірами). Тоді можна вважати, що видимі розміри як Місяця, так і статуї прямо пропорційні їх істинним розмірам і обернено пропорційні відстані до них.
Позначимо r_c – видима довжина розмаху рук статуї, R_c = 28 м – її справжня довжина, l_c – шукана відстань до статуї, d_M – видимий діаметр Місяця, D_M – справжній діаметр Місяця і l_M – відстань від фотографа до Місяця. $\frac{d_M}{r_c} = \frac{D_M}{R_c} \cdot \frac{l_c}{l_M}$. Звідси $l_c = \frac{d_M \cdot l_M \cdot R_c}{r_c \cdot D_M}$
Відстань від фотографа до Місяця можна вважати рівною відстані від Землі до Місяця.

$$\frac{l_M}{D_M} = \frac{60R_3}{2R_M} = \frac{60R_3}{0,5 \cdot \frac{1}{4} R_3} = 120$$

Зробимо спрощення. $\frac{d_M}{r_c} \approx 1,4$. Виміри на малюнку дають, що . Тоді $l_c = 1,4 \cdot 120 \cdot 28$ м $= 4704$ м $\approx 4,7$ км.
Видно, що Місяць сідає практично вертикально, що приблизно і повинно бути в тропічних широтах (Ріо-де-Жанейро лежить майже точно на південному тропіку). Виміряємо відстань, яку між першим і останнім знімками, пройшов Місяць. Вона виявляється практично рівною видимому діаметру диска Місяця. Кутовий діаметр диска Місяця в небі Землі складає приблизно 30′. Оцінюємо швидкість (кут) руху Місяця по небу. Основний рух Місяця - це рух разом з усім небом внаслідок обертання Землі навколо своєї осі (Місяць ще й рухається навколо Землі по орбіті, але за цей малий проміжок часу між знімками цим рухом ми можемо знехтувати). Земля робить повний оберт в 360^0 за 24 години. Тоді за 1 годину Земля повернеться на 15^0, а за 1 хвилину - на 15′. Отже, шуканий час приблизно 2 хв.

7. Бачимо, що напрям на центр, навколо якого рухаються зорі, тобто північний полюс світу, приблизно співпадає з напрямом на вершину башти. Висота полюса світу дорівнює широті місця спостереження, тому $\phi = 43^0\ 30' = 43,5^0$. Тоді відстань до башти $L = \frac{H}{tg(\varphi)} - \frac{D}{2} = \frac{53}{0,95} - 22,5 \approx 33,3$ м.



Розв'язки завдань III етапу Всеукраїнської олімпіади з астрономії. 2020 рік. 11 клас

1.1 г,б,а,в
1.2 в,а,б,г
1.3 а
1.4 а
1.5 Плеяди – це зоряне скупчення, все інше – сузір'я
1.6 Калісто – це супутник, все інше – малі тіла Сонячної системи.
1.7 1-в, 2-д, 3-а, 4-б.
1.8 1-д, 2-г, 3-б, 4-в.
1.9 так, ні, ні, так, так.
1.10 ні, так, ні, ні, так.

2. Переведемо довготу в години. $1^0 \to 4^m$, $1' \to 4^s$. $\lambda = 26^0\,13' = 104^m 52^s \approx 1^h\,45^m$.
Знайдемо поясний час $T_п = T_m - \lambda + n$, де n=2. $T_п = 0^h\,15^m$.

$h_{в.к.} = 90^0 - z_{в.к.} = 79^0 17'$.

1 вип. $h_{в.к.} = 90^0 - \varphi + \delta$. Звідси $\delta = h_{в.к.} - 90^0 + \varphi = 39^0 54'$.

2 вип. $h_{в.к.} = 90^0 - \delta + \varphi$ Звідси $\delta = 90^0 + \varphi - h_{в.к.} = 61^0,2'$

За умовою зоря не заходить $\delta \geq 90^0 - \varphi$, отже перший випадок не підходить. Схилення зорі $\delta = 61^0,2'$.

3. Порівняємо періоди обертань супутників, знаючи, що радіуси відрізняються вдвічі. За III законом Кеплера. $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}} = \sqrt{8}$. $T_2 = \sqrt{8}T_1$.

Якщо проходження через зеніт супутників відбувається одночасно, то це означає, що або періоди їх обертання однакові, що неможливо згідно умови задачі (різні радіуси орбіт супутників), або що їх синодичні періоди однакові, причому один з них рухається швидше за Землю, а інший повільніше. Отже для швидшого супутника $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{S}$, для повільнішого $\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2} = \frac{1}{S}$, де T_0 = 24 год – період обертання Землі. Звідси $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}$.

$\frac{T_0 - T_1}{T_1 T_0} = \frac{T_2 - T_0}{T_0 T_2}$; $2T_2T_1 = T_0(T_2 + T_1)$; $2 \cdot \sqrt{8}T_1^2 = T_0(\sqrt{8}T_1 + T_1)$; $T_1 = \frac{T_0(\sqrt{8}+1)}{2\sqrt{8}} \approx 16{,}2$ год.

Тоді $T_2 = \sqrt{8}T_1 = 45{,}82$ год.

4. Скористаємося II законом Кеплера для орбіти АМС в перигелії (на орбіті Землі) і в афелії (на орбіті Марса). ("за рівні проміжки часу радіус-вектор АМС описує рівні площі").

На схематичному малюнку показано заштриховані площі, пройдені по еліптичній орбіті за одиницю часу. Площі секторів можна вважати приблизно рівними площами відповідних трикутників. Оскільки час одиничний, то основи трикутників (хорди, що стягують заштриховані сектори) чисельно рівні швидкостям в перигелії і афелії, а висоти трикутників - перигелийній і афелійній відстані.

З рівності площ робимо висновок: $\upsilon_a \cdot r_a = \upsilon_n \cdot r_n$, де індексами *a* позначені швидкість і відстань в афелії (на орбіті Марса), а індексами *n* – швидкість і відстань в перигелії (на орбіті Землі).

У нашому випадку відомо, що $\upsilon_п$=33 км/с, $r_п$=1 а.о., $r_а$=1,52 а.о. Звідси отримуємо, що $\upsilon_а$=21,7 км/с – таку швидкість буде мати АМС, що підлетіла до орбіти Марса.

Знайдемо кругову швидкість на орбіті Марса. Скористаємося для цього II з-ном Ньютона і законом всесвітнього тяжіння. Для Марса. $m_M \frac{\upsilon_M^2}{r_M} = G\frac{M_C \cdot m_M}{r_M^2}$. Для Землі $m_M \frac{\upsilon_З^2}{r_З} = G\frac{M_C \cdot m_З}{r_З^2}$. Звідси $\frac{\upsilon_З^2}{\upsilon_M^2} = \frac{r_M}{r_З}$, де r – великі півосі їх орбіт, які вважаємо коловими, υ – кругові швидкості руху по відповідних орбітах.

(Або за III законом Кеплера: $\frac{T_M^2}{T_З^2} = \frac{r_M^3}{r_З^2}$, де T – періоди обертання навколо Сонця. Оскільки $T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$, то $\frac{\upsilon_З^2}{\upsilon_M^2} = \frac{r_M}{r_З}$).

Відомо, що $\upsilon_З$=30 км/с, звідси $\upsilon_M = \upsilon_З\sqrt{\frac{r_З}{r_M}} \approx 24{,}3$ км/с. Отже, при підльоті до орбіти Марса АМС потрібно надати додаткову швидкість. 24,3 км/с – 21,7 км/с = 2,6 км/с.

5. Оскільки Венера перебувала в найбільшій східній елонгації як для Землі, так і для Марса, то ці дві планети розташовувалися в напрямку, перпендикулярному радіусу-вектору Венери (див. малюнок). Кутову відстань Венери від Сонця на Землі під час найбільшої елонгації знайдемо з прямокутного трикутника *ЗВС*.

ЗС = 1 а.о., *ВС* = 0,72 а.о.. $\sin\angle ВЗС = \frac{0{,}72}{1} = 0{,}72$.

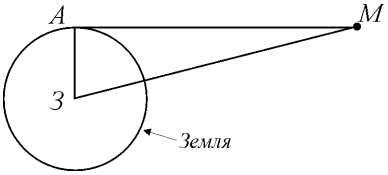
$\angle ВЗС \approx 46^0$. Отже, Марс знаходився на 134^0 від Сонця на захід.

Горизонтальний паралакс Марса – це кут, під яким з Марса було б видно радіус Землі, перпендикулярний до променя зору. Відстань від Землі до Венери знайдемо з трикутника

$ЗВС$. $ЗВ = \sqrt{ЗС^2 - ВС^2} \approx 0{,}69$ а.о. Відстань від Марса до Венери знайдемо з трикутника $МВС$.

$МВ = \sqrt{МС^2 - ВС^2} = \sqrt{1{,}52^2 - 0{,}72^2} \approx 1{,}34$ а.о. Тоді відстань від Землі до Марса 0,65 а.о.

На малюнку 2: $ЗМ$ – відстань від Землі до Марса, $ЗА$ – радіус Землі, $\angle АМЗ$ – горизонтальний паралакс.



$$\sin\angle АМЗ = \frac{6370 \text{ а.о.}}{0{,}65 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ а.о.}} \approx 0{,}000065.$$

$$\angle АМЗ \approx 0{,}0037^0 \approx 13{,}4''.$$

6. Вимірюємо масштаб по схиленнях, враховуючи, що відстань між колами схилень 10^0.

$k = \frac{10^0}{1{,}3 \text{ см}} \approx 7{,}7 \frac{\text{град}}{\text{см}}$. Вимірюємо лінійкою лінійне зміщення Місяця: $s \approx 1{,}8$ см.

В градусній мірі Місяць пройде $\varphi = 1{,}8 \text{ см} \cdot 7{,}7 \frac{\text{град}}{\text{см}} \approx 13{,}85^0$. (Можна було б взяти окремо масштаб по прямих сходженнях і відстань розрахувати за теоремою Піфагора, але масштаби по схиленнях і по прямих сходженнях в зоні руху Місяця майже однакові, тому суттєво на результат не вплинуть). Знаходимо час руху: t = 25 год≈1,04 доби. Тоді кутова швидкість зміщення Місяця $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{13{,}85^0}{1{,}04} \approx 13{,}3 \frac{\text{град}}{\text{доба}}$.

Знайдемо кут між місячною орбітою і площиною екватора $\sin\gamma = \frac{\delta}{s} = \frac{0{,}7 \text{ см}}{1{,}8 \text{ см}} \approx 0{,}39$.

$\gamma \approx 22{,}9^0$.

Лінійна швидкість $\upsilon = \omega \cdot r$. Виразимо кутову швидкість в радіанах за годину.

$\omega = 13{,}3 \frac{\text{град}}{\text{доба}} = \frac{13{,}3 \cdot \frac{\pi}{180}}{24} \approx 0{,}01 \frac{\text{рад}}{\text{год}}$. Тоді лінійна швидкість

$\upsilon = 0{,}01 \frac{\text{рад}}{\text{год}} \cdot 397500 \text{ км} = 3975 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

7. З графіка видно, що сумарний блиск обох компонент (поза затемненнями) становить $m_{заг} = 2^m$. На кривій є два мінімуми: в одному блиск становить 3^m, в іншому $2{,}4^m$.

Оскільки мінімуми тривають деякий час, то це означає, що одна з зір повністю заходить за іншу і в цей момент блиск не змінюється. Можливі два варанти:

1. Блиск однієї зорі $2{,}4^m$, вона більша за розміром і повністю закриває іншу зорю (на графіку – верхній мінімум). В іншому мінімумі (див. малюнок) менша і слабша за яскравістю зоря частково закриває більшу зорю і тоді видно меншу зорю повністю, а більшу частково. Їх спільний блиск в цьому мінімумі 3^m. Знайдемо блиск меншої зорі.

Згідно формули Погсона $\frac{E_{заг}}{E_1} = \frac{E_2 + E_1}{E_1} = 2{,}512^{m_1 - m_{заг}}$, де $E_{заг}$ – освітленість обох зір поза затемненнями, $\frac{E_2}{E_1} + 1 = 2{,}512^{m_1 - m_{заг}}$;

$\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{2{,}4-2} - 1$. $\frac{E_2}{E_1} = 0{,}445$. Знову використаємо формулу Погсона $\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{m_1 - m_2}$; $\lg\frac{E_2}{E_1} = (m_1 - m_2)\cdot\lg 2{,}512$. $\lg 0{,}445 = (2{,}4 - m_2)\cdot 0{,}4$; $2{,}4 - m_2 = -0{,}88$. $m_2 = 3{,}28$.

2. Блиск однієї зорі 3^m, вона більша за розміром і повністю закриває іншу зорю (на графіку – нижній мінімум). В іншому мінімумі (див. малюнок) менша і сильніша за яскравістю зоря частково закриває більшу зорю і тоді видно меншу зорю повністю, а більшу частково. Їх спільний блиск в цьому мінімумі $2{,}4^m$. Знайдемо блиск меншої зорі. Аналогічно згідно формули Погсона $\frac{E_{заг}}{E_1} = \frac{E_2 + E_1}{E_1} = 2{,}512^{m_1 - m_{заг}}$; $\frac{E_2}{E_1} + 1 = 2{,}512^{m_1 - m_{заг}}$; $\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{3-2} - 1$. $\frac{E_2}{E_1} = 1{,}512$. Знову використаємо формулу Погсона $\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{m_1 - m_2}$; $\lg\frac{E_2}{E_1} = (m_1 - m_2)\cdot\lg 2{,}512$. $\lg 1{,}512 = (3 - m_2)\cdot 0{,}4$; $3 - m_2 = 0{,}45$. $m_2 = 2{,}25$.