

Тема: Розв'язування логарифмічних рівнянь

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Означення. Логарифмічні рівняння - це рівняння, що містять змінну під знаком логарифма.

Наприклад: $\log_3 (3x - 2) = 4$.

Розв'язання логарифмічних рівнянь ґрунтується на означенні логарифма, властивостях логарифмічної функції та властивостях логарифма.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь

1. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad a > 0, a \neq 1.$
2. $\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow (f(x))^b = g(x) \quad f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0$
3. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad f(x) > 0, g(x) > 0$
4. $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x) \quad f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0, h(x) > 0$
5. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \log_a (f(x)g(x)) = \log_a h(x) \quad f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0$
6. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a h(x) \quad f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0$
7. $n \log_a f(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \log_a f(x)^n = \log_a h(x) \quad f(x) > 0, h(x) > 0$
8. $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = 2n \log_a |f(x)|$$

Приклади розв'язання логарифмічних рівнянь

1. Використання означення логарифму

Приклад 1.

Розв'язати рівняння: $\log_{27} X = 23$.

Спочатку знайдемо область допустимих значень рівняння (ОДЗ): $X > 0$

Перетворимо логарифмічне рівняння та виконаємо обчислення:

$$\log_{27} X = 23 \Leftrightarrow 27^{2/3} = X$$

$$X = 27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$$

Відповідь: $X = 9$.

Приклад 2.

Розв'язати рівняння $\log_2 (X - 3) = 4$.

Знайдемо ОДЗ рівняння: $X - 3 > 0 \Rightarrow X > 3$

Із означення логарифма отримаємо:

$$X - 3 = 2^4 = 16$$

$$X = 16 + 3 = 19$$

Відповідь: $X = 19$.

Приклад 3.

Розв'язати рівняння $\log_x (2X^2 - 3X - 4) = 2$.

Знайдемо ОДЗ рівняння: $X > 0, X \neq 1, 2X^2 - 3X - 4 > 0$

Із означення логарифма отримаємо:

$$X^2 = 2X^2 - 3X - 4 \Rightarrow X^2 - 3X - 4 = 0$$

Скориставшись теоремою Вієта легко знайти корені рівняння $X^2 - 3X - 4 = 0$

$$X_1 = 4, X_2 = -1$$

Виберемо корені що входять до ОДЗ:

$X_1 = 4$ - задовольняє всім умовам ОДЗ:

$$4 > 0, 4 \neq 1, 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 32 - 12 - 4 = 16 > 0$$

$X_2 = -1$ - не задовольняє першу умову з ОДЗ:

$$-1 < 0, -1 \neq 1, 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 2 + 3 - 4 = 1 > 0$$

Відповідь: $X = 4$.

2. Метод потенціювання

Приклад 4.

Розв'язати рівняння $\log_3 (X^2 - 4X - 5) = \log_3 (7 - 3X)$.

Знайдемо ОДЗ рівняння: $X^2 - 4X - 5 > 0$; $7 - 3X > 0$

Замінімо логарифмічне рівняння рівносильним:

$$X^2 - 4X - 5 = 7 - 3X$$

$$X^2 - X - 12 = 0$$

Скориставшись теоремою Вієта легко знайти корені рівняння $X^2 - X - 12 = 0$

$$X_1 = 4, X_2 = -3$$

Виберемо корені які входять до ОДЗ:

$X_1 = 4$ - не задовольняє умовам ОДЗ:

$$4^2 - 4 \cdot 4 - 5 = -5 < 0 \quad 7 - 3 \cdot 4 = -5 < 0$$

$X_2 = -3$ - задовольняє умовам ОДЗ:

$$(-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 5 = 16 > 0 \quad 7 - 3 \cdot (-3) = 16 > 0$$

Відповідь: $X = -3$.

Приклад 5.

Розв'язати рівняння $\lg (X - 9) + \lg (2X - 1) = 2$.

Знайдемо ОДЗ рівняння: $X - 9 > 0$; $2X - 1 > 0 \Rightarrow X > 0.5 \Rightarrow X \in (9; +\infty)$

Так як $\lg 100 = 2$, то

$$\lg (X - 9) + \lg (2X - 1) = \lg 100$$

Скористаємось властивістю, що [сума логарифмів дорівнює логарифму добутку](#)

$$\lg (X - 9)(2X - 1) = \lg 100$$

Замінімо логарифмічне рівняння рівносильним:

$$(X - 9)(2X - 1) = 100$$

$$2X^2 - 19X + 9 = 100$$

$$2X^2 - 19X - 91 = 0$$

Розв'яжемо квадратне рівняння:

$$D = 19^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-91) = 1089$$

$$x_1 = 19 + \sqrt{1089} \cdot 2 = 19 + 334 = 13$$

$$x_2 = 19 - \sqrt{1089} \cdot 2 = 19 - 334 = -3.5$$

ОДЗ задовольняє тільки один корінь $x = 13$

Відповідь: $x = 13$.

3. Метод заміни змінної, зведенням логарифмічного рівняння до алгебраїчного

Приклад 6.

Розв'язати рівняння $112\lg^2 x = 13 - 14\lg x$.

ОДЗ: $x > 0$.

Зробимо заміну змінної $\lg x = t$:

$$112t^2 = 13 - 14t$$

$$t^2 = 4 - 3t$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Скориставшись теоремою Вієта легко знайти корені рівняння

$$t_1 = -4$$

$$t_2 = 1$$

Повернемося до змінної x

$$\lg x = -4 \Rightarrow x = 10^{-4} = 0.0001$$

Відповідь: рівняння має два кореня $x_1 = 0.0001$ и $x_2 = 10$.

4. Зведення логарифмічного рівняння до однієї основи

Приклад 7.

Розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_{1/16} x + \log_8 x^3 = 5$.

ОДЗ: $x > 0$.

Скориставшись властивостями логарифмів зведемо логарифми в рівнянні до основи 2:

$$12\log_2 x - 14\log_2 x + \log_2 x = 5$$

$$(12 - 14 + 1)\log_2 x = 5$$

$$54\log_2 X = 5$$

$$\log_2 X = 4$$

$$X = 2^4 = 16$$

Відповідь: $X = 16$.

5. Логарифмування обох частин рівняння

Приклад 8.

Розв'язати рівняння $X^{\lg X} = 100X$.

ОДЗ: $X > 0$.

Прологарифмуємо обидві частини рівняння по основі 10, і використаємо властивість логарифма степеню і частки:

$$\lg X^{\lg X} = \lg 100X$$

$$\lg X \cdot \lg X = \lg 100 - \lg X$$

$$\lg^2 X + \lg X - 2 = 0$$

Виконаємо заміну змінної $\lg X = t$:

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Скориставшись теоремою Вієта легко знайти корені рівняння

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 1$$

Повернемося до змінної X

$$\lg X = -2 \quad \lg X = 1 \Rightarrow X = 10^{-2} X = 10$$

Відповідь: рівняння має два кореня $X_1 = 0.01$ и $X_2 = 10$.

6. Використання монотонності при розв'язанні логарифмічних рівнянь

Приклад 9.

Розв'язати рівняння $\log_5 (X + 3) = 3 - X$.

ОДЗ: $X > 0$.

$y = \log_5 (X + 3)$ - монотонно зростаюча функція;

$y = 3 - x$ - монотонно спадна функція;

Так як перша функція монотонно зростає, а друга монотонно спадає, то вони мають одну точку перетину, яка буде розв'язком початкового рівняння.

Підбором знайдемо розв'язок:

$$\text{При } x = 2 \Rightarrow \log_5(2 + 3) = 1; 3 - 2 = 1$$

Відповідь: $x = 2$.

Завдання:

1. Вивчити пункт 6.
2. Законспектувати означення.
3. Виконати письмово вправи: 6.1, 6.3.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.