PHÒNG GD&ĐT THANH OAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Môn: **Toán**

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Đề thi gồm có: 01 trang

Câu 1: (6 điểm)

a) Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$

1. Rút gọn M
2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b) Tính giá trị của biểu thức P

$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006$ với $x = \sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}} - \sqrt{3}$

Câu 2: (4 điểm) Giải phương trình

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 24$

b) $\left|2x - x^2 - 1\right| = 2x - x^2 - 1$

Câu 3: (4 điểm)

a/ Cho hai số dương x, y thoả mãn x + y = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \le \frac{3}{2}$.

Câu 4: (5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.
2. Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thoả mãn điều kiện gì thì biểu thức $P = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$. Đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3. Chứng minh các hệ thức sau: CE.DF.EF = CD^3 và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.

Câu 5: (1 điểm)

Tìm $n \in N^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

- Hết -

Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

PHÒNG GD&ĐT THANH OAI **HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

Môn: **Toán**

Câu 1: (6 điểm)

a) (4,5đ)

ĐKXĐ: $x \ge 0; x \ne 4; x \ne 9$ (*)

1)Rút gọn M : Với $x \ge 0; x \ne 4; x \ne 9$ (0,5đ)

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \ge 0; x \ne 4; x \ne 9$) (*) (2,5đ)

2) $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ (0,75đ)

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 \vdots \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

Ư(3) $\in \{\pm 1;\pm 3\}$ Vì $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1;3\}$ Xảy ra các trường hợp sau: (0,5đ)

. $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

. $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (không TMĐK (*) loại) (0,25đ)

Vậy x = 0 thì M nhận giá trị nguyên.

b_

$$x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}.-\sqrt{3}$$

Có $\sqrt{18-8\sqrt{2}}=\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}=\left|4-\sqrt{2}\right|=4-\sqrt{2}$

(0,5đ)

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}+4}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\left|\sqrt{3}+1\right|$$

(0,25đ)

$$x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}-\sqrt{3}$$

$$x=\sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$$

$$x=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{3}=\left|\sqrt{3}+1\right|-\sqrt{3}=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$$

(0,75đ)

Với x = 1.Ta có $P=3.1^{2013}+5.1^{2011}+2006=3+5+2006=2014$

Vậy với x = 1 thì P = 2014

Câu 2: (4 điểm)

a. $(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)=24$ **0,25 đ**

$\Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24$ (1) **0,25 đ**

Đặt $x^2+9x+19=y$ **0,5 đ**

(1) $\Leftrightarrow$ (y + 1)(y – 1) – 24 = 0 **0,5 đ**

$\Leftrightarrow$ $y^2 - 25 = 0$ **0,25 đ**

$\Leftrightarrow$ $(x^2+9x+24)(x^2+9x+14)=0$ **0,5 đ**

$\Leftrightarrow$ $(x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$ **0,5 đ**

Chứng tỏ $x^2+9x+24>0$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=-2; x=-7$ **0,25 đ**

b. Ta có $2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2<0$ **0,25 đ**

pt trở thành : $2x-x^2-1=x^2-2x+1$ **0,5 đ**

$\Leftrightarrow$ $x=1$ **0,25 đ**

Câu 3: (4 điểm)

a Cho hai số dương thỏa mãn: x + y =1. ***2đ***

Tìm GTNN của biểu thức: M = $\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$

M = $\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right) = x^2y^2+1+1+\frac{1}{x^2y^2}=\frac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{x^2y^2}$

$=\frac{\left(x^2y^2+1\right)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x^2y^2+1}{xy}\right)^2=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2$ 0,5

Ta có: $xy+\frac{1}{xy}=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy+\frac{1}{16xy}\ge 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (1) *

$\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\ge 4\Rightarrow\frac{1}{16xy}\ge\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{15}{16xy}\ge\frac{15}{4}$ (2) 0,5

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}\ge\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$ 0,25

Vậy M = $\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2\ge\left(\frac{17}{4}\right)^2=\frac{289}{16}$ 0,25

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{16xy}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{4}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ (Vì x, y > 0)

Vậy min M = $\frac{289}{16}$ tại x = y = $\frac{1}{2}$ 0,5

b **2đ**

Cho x, y là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (với a, b > 0) ***0.5***

$$\Rightarrow\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right]\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\right]$$ ***0,5***

$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$$ ***0,5***

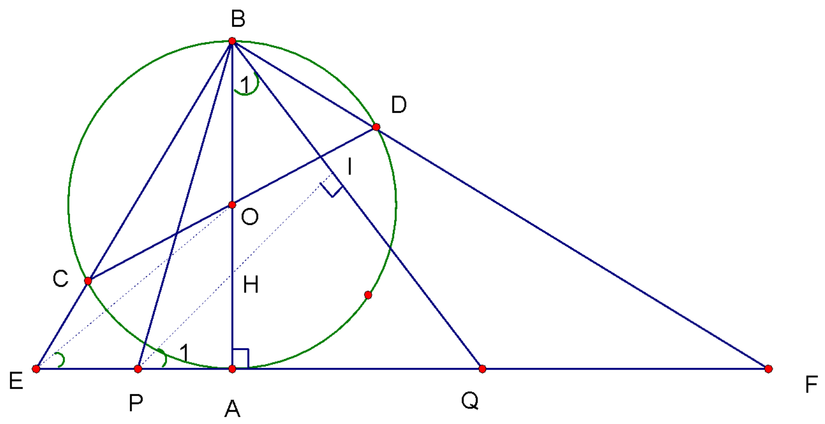
cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}+\frac{4}{y+z}\right)$$

$$\le\frac{4}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{4}.6=\frac{3}{2}$$

0,5

Caai 4: (5 điểm)



0,25

BA là đường cao của tam giác BPQ suy ra H thuộc BA

0,75đ.

Nối OE, Δ BEF vuông tại B; BA $\perp$ EF nên AB^2 = AE. AF

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}\Rightarrow \frac{AE}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\frac{1}{2}\mathrm{AF}}\Rightarrow \frac{AE}{OA}=\frac{AB}{AQ}$$

0,75đ.

Vậy Δ AEO $\backsim$ Δ ABQ(c.g.c). Suy ra $\widehat{ABQ}=\widehat{AEO}$ mà $\widehat{ABQ}=\widehat{P_1}$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{AEO}=\widehat{P_1}$, mà hai góc đồng vị => PH // OE.

0,25đ

Trong Δ AEO có PE = PA (giả thiết); PH// OE suy ra H là trung điểm của OA.

2. Ta cã:

$$P=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3$$

0,75đ.

$$P=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left[\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right]$$

0,5đ

$$P=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

Ta cã:

0,25đ

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2\geq 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow 1\geq 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos^2\alpha\leq\frac{1}{4}$$

0,25đ

Suy ra: $P=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\geq 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

0,25đ

Do ®ã: $P_{\min}=\frac{1}{4}$ khi vµ chØ khi: $\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\cos\alpha$ (v× α lµ gãc nhän) $\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1\Leftrightarrow tg\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=45^0$

0,25đ

0,25đ

Khi đó CD vuông góc với AB

0,25đ

3. Ta có Δ ACB và Δ ADB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên
$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^0$ => ADBC là hình chữ nhật. 0,25đ

Ta có: $CD^2 = AB^2 = AE.\ AF \Rightarrow CD^4 = AB^4 = AE^2.\ AF^2$

$= (EC.EB)(DF.BF) = (EC.DF)(EB.BF) = EC.DF.AB.EF$

$\Rightarrow AB^3 = CE.DF.EF$. Vậy $CD^3 = CE.DF.EF$

Ta có:

$$\frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA.EF}{FA.EF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{CE.BE}{DF.BF} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$$

<u>Câu 5</u>: Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$$\rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + K)^2 = n^4 + 2Kn^2 + K^2 \qquad (K \in N^*)$$

$$\rightarrow n^3 - 2Kn^2 = K^2 - 1 \rightarrow n^2(n - 2k) = K^2 - 1 \geq 0$$

Mà $K^2 - 1 \,⋮\, n^2 \rightarrow K^2 = 1$ hoặc $n^2 \leq K^2 - 1$

Nếu $K^2 = 1 \rightarrow K = 1 \rightarrow n^2(n-2) = 0 \rightarrow n = 2$

Thử lại $2^4 + 2^3 + 1 = 5^2$ (thỏa mãn)

Khi $K \neq 1 \rightarrow K^2 > K^2 - 1 \geq n^2 \rightarrow K > n$

$\rightarrow n - 2k < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$ **(1đ)**

Vậy n = 2