

SESSION DE 1999

GROUPE C/S

PHYSIQUE

DURÉE : 6 heures

- *Les calculatrices sont autorisées.*
- *Chaque résultat indiqué par l'énoncé peut être admis pour résoudre les questions suivantes. De ce fait, chaque partie peut être résolue même si les parties précédentes ne l'ont pas été. Il est donc conseillé de lire l'énoncé soigneusement.*
- *Les parties 1, 2, 3, 4 s'appuient sur des calculs : attention, accompagnez-les d'explications claires et éventuellement de graphiques. Les parties 2, 3, 5, 6 requièrent des raisonnements qualitatifs auxquels les correcteurs accorderont la plus grande importance. Pour certaines questions, en particulier dans les parties 4 et 6, vous aurez à émettre un avis personnel : les correcteurs jugeront, non pas votre opinion, mais la façon dont vous la justifierez.*

Une figure (fig.2) sur page indépendante vous est fournie en 2 exemplaires pour répondre à la question 5, page 8. Un des deux exemplaires est à commenter et à insérer dans le devoir, l'autre

peut vous servir de brouillon ou de figure de rattrapage en cas d'erreur. Cette figure est également reproduite en page 10.

La "toupie qui lévite" (Fig. 1) est un ingénieux dispositif actuellement commercialisé dans les boutiques de jeux. Il s'agit d'une petite toupie en plastique, d'environ deux cm de haut et deux cm de diamètre, dans laquelle se trouve un petit aimant d'une centaine de mm^3 . On fait tourner la toupie au-dessus d'une base, qui est un large disque aimanté de dix cm de diamètre et d'un cm d'épaisseur, contenant un aimant presque aussi grand.

Avec un certain entraînement, on arrive à stabiliser la toupie, qui reste en l'air à quelques centimètres au-dessus de la base! Elle peut ainsi léviter pendant plusieurs minutes, en tournant toujours sur elle-même, avec de légères oscillations horizontales et verticales. Le but du problème est de comprendre le principe de cette lévitation et de discuter quelques ordres de grandeur.

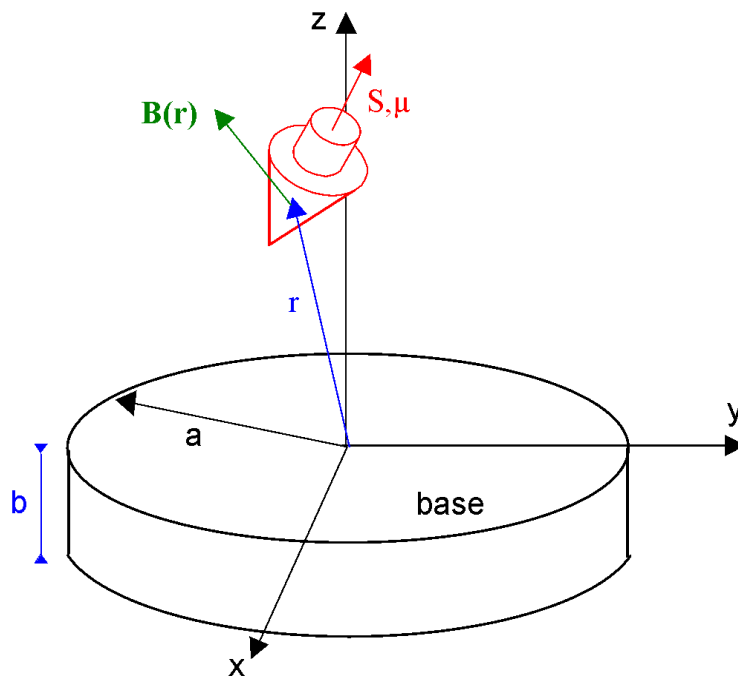


Figure 1

Données et formules

- Le plastique a une densité de l'ordre de celle de l'eau, les aimants sont environ 7 fois plus denses.
- Les deux aimants, celui de la base et celui de la toupie, ont une aimantation $\vec{M}$, c'est-à-dire un moment magnétique par unité de volume, de l'ordre de $5 \times 10^5 \text{ A.m}^{-1}$. En l'absence de champ extérieur, cette aimantation $\vec{M}$ crée à l'intérieur de l'aimant un champ uniforme $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$.

On notera $B = \mu_0 M$ et on donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg.m.s}^{-2}.\text{A}^{-2}$.

- L'origine O des positions est le centre de la face supérieure de la base; on utilisera au choix la notation vectorielle, cartésienne ou cylindrique

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

On notera θ l'angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\rho$.

- Opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \text{grad} A &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \phi}, \frac{\partial A}{\partial z} \right) \\ \text{div} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{rot} \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \\ dA &= \text{grad} A = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial A}{\partial z^2} \\ d\vec{A} &= \text{grad} \vec{A} = \text{rot} \vec{A} - \text{div} \vec{A} \end{aligned}$$

- Quelques données usuelles :

masse de l'électron $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$,

masse du proton $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$,

charge de l'électron $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$,

constante de Boltzmann $1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$,

champ magnétique terrestre $5 \times 10^{-5} \text{ T}$.

1.- Le champ magnétique créé par la base

Répondez brièvement.

Tant que l'on n'a pas mis la toupie, la région juste au-dessus de la base est vide. La base crée dans cette région un champ magnétostatique $\vec{B}$.

1-1.

(a) Quel est le laplacien de $\vec{B}$?

(b) Justifiez qu'il existe une fonction $\Phi(x, y, z)$ telle que $\vec{B} = - \text{grad} \Phi$

(c) Quelles sont les symétries de Φ ?

(d) Quel est le laplacien de Φ ?

(e) Soit un dipôle magnétique situé à l'origine O. Vérifiez que le Φ qu'il crée est de la forme :

$$F(x, y, z) = \vec{u} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

en précisant l'expression de $\vec{u}$.

(f) Pour évaluer $\Phi(x = 0, y = 0, z)$ le long de l'axe vertical Oz, $z > 0$, on modélise la base par un ensemble de dipôles magnétiques: en l'occurrence, un mince disque de rayon a, dont le moment dipolaire par unité de volume, noté $\vec{M}$, pointe vers le haut. On dit alors que la base est un disque "d'aimantation $\vec{M}$ uniforme"

Expliquez pourquoi on peut se ramener au calcul d'une intégrale sur la surface de la base, de la forme

$$F(0, 0, z) = \iint_{\text{base}} f(\rho', z) \rho' d\rho' dq'$$

en précisant l'expression de la fonction f.

(g) Calculez alors l'intégrale et montrez que

$$F(0, 0, z) = A \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

Précisez la valeur numérique et l'unité de A.

1-2. On notera $B_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n B_z}{\partial z^n}(0, 0, z)$ les dérivées successives de B_z , le long de l'axe z.

(a) Avec le minimum de calculs, et sans calculer l'expression des B_n , montrez qu'au voisinage de l'axe Oz les premiers termes du développement de $\vec{B}$ sont:

$$\vec{B}(x, y, z) = -\frac{B_1}{2}\rho\vec{e}_\rho + (B_0 - \frac{B_2}{4}\rho^2)\vec{e}_z + O(\rho^3)$$

(b) Calculez B_0 , B_1 , B_2 .

2. Toupie qui ne tourne pas

Justifiez vos réponses sans calcul, ou à la rigueur avec une équation simple. Vous pouvez vous aider d'une figure.

On place la toupie aimantée sur l'axe Oz au-dessus de la base. Pour l'instant, on ne la fait pas tourner. L'énergie potentielle totale de la toupie E_p tient compte de son interaction magnétostatique avec la base et de la pesanteur.

2-1. Afin de simplifier le calcul de l'effet du champ $\vec{B}$ sur cette toupie, on écrira que E_p vaut environ $mgz - \vec{m} \cdot \vec{B}$, où le moment magnétique $\vec{m}$ reste toujours parallèle à $\vec{n}$, vecteur directeur de l'axe de la toupie.

(a) Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet, et donc dans quelle mesure cette simplification est-elle justifiée ?

(b) Discutez avec précision de combien de variables de translation (positions) et d'orientation (angles) dépend E_p .

(c) Exprimez $\vec{m}$ en fonction des caractéristiques de la toupie. Indiquez l'ordre de grandeur de la valeur de μ et son unité.

(d) En considérant leurs unités, écrivez une équation aux dimensions qui combine μ , A , et le poids de la toupie pour construire une grandeur L qui a les dimensions d'une longueur. Discutez la signification physique de L , et estimez approximativement sa valeur numérique.

2-2. Imaginez provisoirement que l'on arrive à fixer la position de la toupie, en un point de l'axe Oz. On n'impose pas l'orientation de la toupie.

(a) Quelles sont les orientations qui correspondent à un équilibre ?

(b) Discutez la stabilité de chacun de ces équilibres : lesquels sont stables, lesquels sont instables ?

2-3. Imaginez provisoirement que l'on arrive à fixer l'orientation de la toupie parallèlement à Oz : soit dirigée vers le haut, soit dirigée vers le bas. On n'impose pas que la position de la toupie reste sur l'axe Oz.

(a) Quelles sont les positions qui correspondent à un équilibre ?

(b) Discutez la stabilité de chacun de ces équilibres : lesquels sont stables, lesquels sont instables ?

(c) Le laplacien de E_p est-il partout nul ? Y a-t-il un lien avec la stabilité des points d'équilibre ?

3. Toupie rapide

Justifiez les équations que vous écrivez.

On fait tourner la toupie rapidement. Pour simplifier l'étude de cette toupie, on suppose dans toute la suite que son moment cinétique $\vec{S}$, sa rotation propre $\vec{\omega}$, et son moment magnétique $\vec{m}$ restent constamment parallèles au vecteur directeur $\vec{n}$ de son axe de symétrie.

3-1.

(a) Pouvez-vous imaginer, intuitivement, quel sera l'effet de cette rotation sur la lévitation de la toupie ?

(b) Indiquez l'ordre de grandeur de ω . Pour cela, imaginez-vous en train de lancer une toupie, soit entre vos doigts, soit en l'entourant d'une ficelle que vous tirez d'un coup sec. Pouvez-vous évaluer grossièrement ω à l'oeil ou à l'oreille ?

3-2.

(a) Si la toupie restait toujours à la même position $\vec{r}$, elle verrait toujours le même champ magnétique $\vec{B}(x, y, z)$. Ecrire alors explicitement l'équation d'évolution de $\vec{S}$: porte-t-elle sur la dérivée première ou seconde de $\vec{S}$ par rapport au temps ?

(b) Montrez qu'en ce cas l'axe de la toupie tourne autour de la direction $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ du champ magnétique (mouvement de précession), avec une vitesse de rotation ω' que l'on définira.

(c) Montrez que $S = ||\vec{S}||$, $S_{\vec{S} \cdot \vec{b}}$ et $m_{\vec{m} \cdot \vec{b}}$ seraient constants, indépendants du temps.

(d) Dans ce qui suit, on écrira que S et m sont constants, même si la toupie se déplace un peu dans l'espace. Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet, c'est-à-dire du terme correctif que l'on néglige ? Serait-il possible de l'évaluer numériquement ?

3-3. Dans toute la suite du problème on écrit donc désormais l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_p = mgz - m_{\vec{m} \cdot \vec{B}},$$

$$m_- \approx \text{constant.}$$

- (a) De combien de variables dépend E_p ?
 (b) Le laplacien de E_p est-il partout nul ? Y a-t-il un lien avec la stabilité des points d'équilibre éventuels ?

3-4.

- (a) En tête de cette partie, nous avons supposé que $\vec{S}$ et $\vec{w}$ restent parallèles. Quelle approximation cela revient-il à faire ?

- (b) Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet, c'est-à-dire du terme correctif que l'on a négligé ? Serait-il possible de l'évaluer numériquement ?
 (c) Quand la toupie tourne plus vite, cette approximation devient-elle meilleure ou moins bonne ?

4. Stabilité de la toupie rapide

Justifiez les équations que vous écrivez.

Pour déterminer à quelles conditions la toupie rapide est stable au voisinage de l'axe Oz, l'énoncé propose ci-dessous deux méthodes distinctes. Traitez-les toutes les deux dans l'ordre de votre choix. Indiquez clairement sur votre copie les numéros des questions que vous traitez.

• 4-1 - Première méthode :

(1a) A partir de l'expression approximative de l'énergie potentielle donnée à la question 3-3, écrivez les conditions d'existence d'un équilibre stable dans toutes les directions à la fois.

(1b) En utilisant l'expression de $\vec{B}$ donnée à la question 1-2 (a), montrez que ces conditions impliquent que :

$$m_{-B_1 \text{sgn} B_0 > 0(i)} \quad m_{-B_2 \text{sgn} B_0 < 0(ii)}$$

où $\text{sgn} B_0 = B_0/|B_0|$ est le signe de B_0 .

(1c) En utilisant les expressions des B_n , calculées au 1-2 (b), montrez que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre stable se met sous la forme:

$$0,5 z_0 < z < 0,632 z_0, \\ 0,818 m_0 < m < 0,859 m_0.$$

Donnez approximativement la valeur numérique de m_0 et de z_0 . Ecrivez la relation entre m et z à l'équilibre.

ou bien

• 4-2 - Deuxième méthode

(2a) A partir de l'expression approximative de l'énergie potentielle donnée à la question 3-3, et en utilisant les expressions de $\vec{B}$ donnée à la question

1-2 (a), et des B_n , calculées au 1-2 (b), écrivez E_p en fonction de la position. Vérifiez soigneusement les unités.

(2b) Montrez que l'on peut l'écrire sous une forme sans dimensions

$$E(R, Z) = MZ + \frac{1}{(1+Z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3R^2(2-5Z^2)}{8(1+Z^2)^{\frac{7}{2}}} + O(R^4)$$

où $E = E_p/E_0$, $M = m/m_0$, $X = x/x_0$, $Y = y/y_0$, $Z = z/z_0$, et $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

Donnez la valeur numérique approximative de E_0 , m_0 , x_0 , y_0 et z_0 .

(2c) Montrez que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre stable dans toutes les directions à la fois se met sous la forme

$$0,5 < Z < 0,632, \\ 0,818 < M < 0,859$$

Ecrivez la relation entre M et Z à l'équilibre.

4-3.

(a) Discutez quels sont les avantages et les inconvénients de chaque méthode. Sont-elles exactes ou approchées ? Laquelle est la plus simple ? La plus générale ? Laquelle est la plus facile à adapter au cas où la base est, non pas un disque, mais par exemple un carré ? Laquelle nécessite le moins de calculs ? Auriez-vous une meilleure méthode à proposer ?

(b) Que se passe-t-il si la toupie est plus légère que $0,818 m_0$? Si elle est plus lourde que $0,859 m_0$?

(c) Déterminez de combien varie z si on modifie très légèrement de δm la masse de la toupie.

5. Etude graphique de l'énergie potentielle

Les correcteurs ne tiendront compte que des dessins munis d'une légende précise et accompagnés d'explications sur la copie.

La Figure 2, sur la feuille volante ci-jointe, montre dans un plan vertical les courbes équipotentiellles de l'énergie

$$E(R, Z) = MZ + \frac{1}{(1+Z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3R^2(2-5Z^2)}{8(1+Z^2)^{\frac{7}{2}}} + O(R^4) = \text{constante},$$

où l'énergie potentielle E de la toupie et les variables de positions X , Y , Z sont ici écrits sous la forme sans dimension introduite à la question (4-2). Comme

la forme des courbes dépend beaucoup du paramètre M , elles ont été calculées par ordinateur pour sept valeurs différentes de M

- (a) $M = 0,810$, situation instable ;
- (b) $M = 0,818 = M_-$, valeur limite de la stabilité
- (c) $M = 0,840$, situation stable ;
- (d) $M = 0,848$ situation de stabilité maximale
- (e) $M = 0,855$, situation stable
- (f) $M = 0,859 = M_+$, valeur limite de la stabilité
- (g) $M = 0,862$, situation instable.

Chaque figure, tracée par ordinateur, a pour abscisse X , autour de l'axe

$X = 0$, et pour ordonnée $Z > 0$; la base n'est pas représentée ici, elle est bien plus bas. Il s'agit d'une coupe dans un plan méridien $Y = 0$. On notera $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

5-1. Discutez avec précision les cas (a,c,e,g). Pour ces 4 cas, dessinez schématiquement sur la feuille volante ci-jointe, en couleurs si possible:

- Les lignes de champ de la résultante des forces que subit la toupie. Tracez les lignes particulières en trait pleins, tracez-en quelques autres en pointillés. Indiquez leur orientation. par des flèches.
- Les points d'équilibre stables. Marquez-les par un "S".
- Les points d'équilibre instables. Marquez-les par un "I".
- Quelques trajectoires.

N'oubliez pas de rendre la figure avec votre copie.

5-2. Discutez en quelques mots, ou en vous aidant d'un schéma:

- (a) Quand on augmente progressivement M de 0,810 à 0,862, commentez l'apparition et la disparition des points d'équilibre sur les figures (b,d,f). Que se passe-t-il quand deux points d'équilibre deviennent si proches qu'ils fusionnent ? Les nouveaux points d'équilibre apparaissent-ils toujours par paire
- (b) Reprenez la question (3-3 b) à la lumière des figures (c,d,e).
- (c) Reprenez la question (4-3 b) à la lumière des figures (a,g).

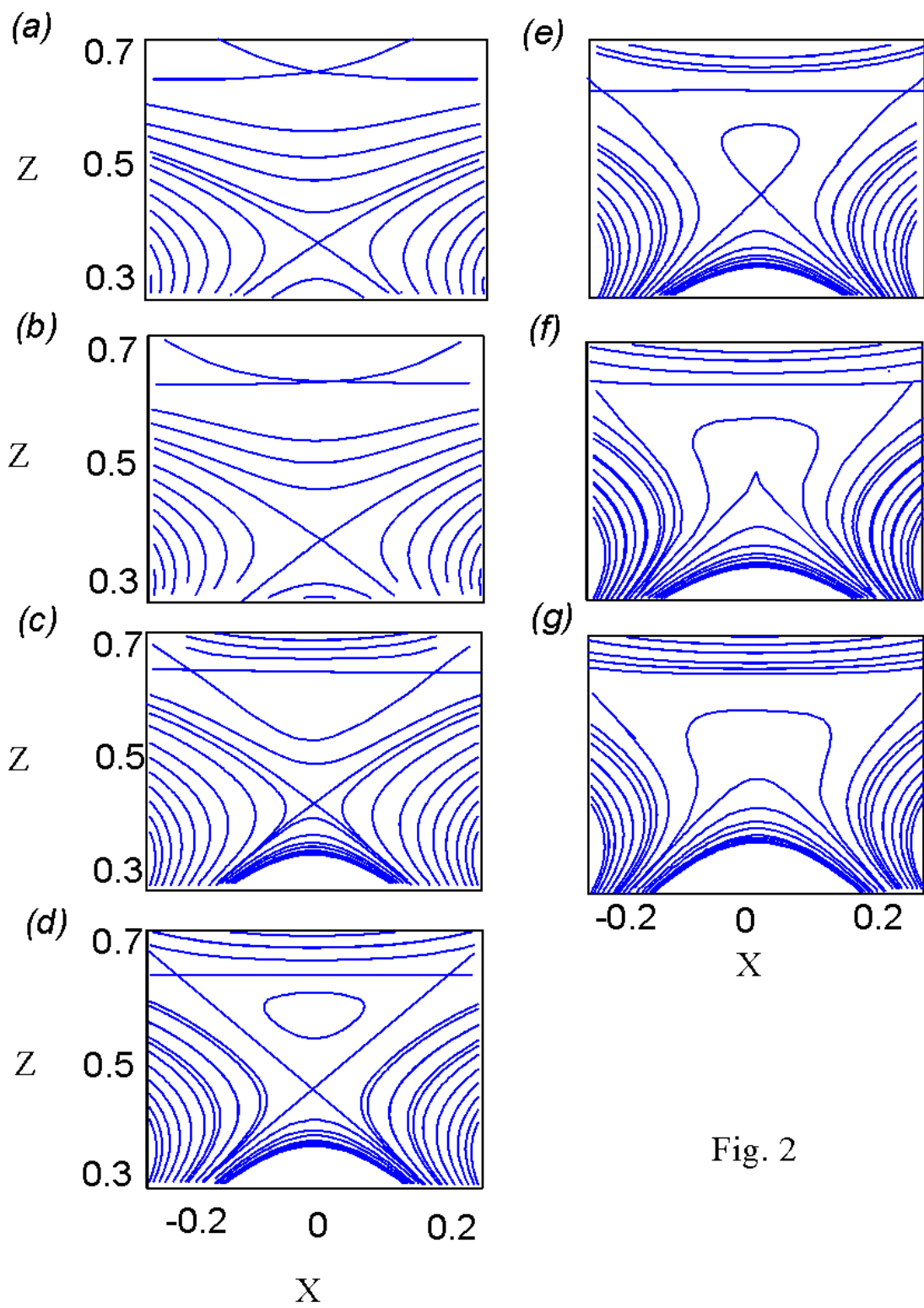


Fig. 2

6. Discussion physique

Répondez brièvement et sans équations. Vous pouvez vous aider d'une figure.

6-1. En moins d'une demi-page de texte, essayez de résumer de façon personnelle ce que vous avez compris des résultats précédents.

6-2. Discutez le principe de cette lévitation :

- (a) Quel est le mécanisme physique qui permet à la toupie de léviter de façon stable ?
- (b) Votre intuition de la question (3-1 a) a-t-elle été confirmée par les questions ultérieures ?
- (c) Selon que l'on fixe la direction du moment magnétique, ou au contraire qu'on la laisse libre de précesser autour du champ magnétique, est-ce que la situation physique est très différente ?
- (d) Est-ce que la même toupie lévite aussi bien quand elle est lancée par un droitier (donc dans le sens des aiguilles d'une montre) ou par un gaucher (donc dans le sens trigonométrique) ?
- (e) Commentez les approximations successives qui ont été faites.

6-3. Discutez la réalisation pratique de cette lévitation:

- (a) En pratique, on pose une petite plaque de plastique sur la base, et on fait tourner la toupie dessus, comme une toupie usuelle. Ensuite seulement, on soulève délicatement la plaque, jusqu'à ce que la toupie prenne sa position d'équilibre. La plaque devient alors inutile, et on la retire. Pourquoi est-ce plus facile que de lancer la toupie directement à sa position d'équilibre ?
- (b) Au bout de quelques minutes de lévitation, à cause de la viscosité de l'air, la toupie ralentit. Pouvez-vous imaginer ce qu'elle devient alors ?
- (c) En pratique, il est indispensable que l'axe de symétrie soit bien vertical. Pour cela, le jeu est livré avec deux petites cales, grâce auxquelles on arrive avec un peu d'entraînement à ajuster l'horizontalité de la base. Que se passe-t-il si ce réglage n'est pas réalisé suffisamment précisément ?
- (d) Une autre difficulté pratique est qu'il est nécessaire d'ajuster précisément la masse de la toupie, à une fraction de pourcent; près. Pour cela, on enfile autour de son axe quelques uns des légers disques de plastique ou de métal livrés avec le jeu. Pourquoi la masse doit-elle être réglée si précisément ?
- (e) Comme la température de la pièce varie lentement, on est obligé de refaire un réglage précis de la masse toutes les demi-heures environ. Pourquoi : quels sont les paramètres du problème qui sont sensibles à la température ?

6-4. Autres types de lévitation

- (a) Un "diamagnétique parfait" est un autre système capable de lévitation magnétique. Par définition, lorsqu'il est plongé dans un champ extérieur $\vec{B}$, un diamagnétique parfait prend une aimantation $\frac{\vec{M} = -\chi \vec{B}}{m_0}$, ce qui fait que le champ total résultant à l'intérieur de ce corps reste toujours nul.

Quelle est l'énergie potentielle d'un tel système ? Son laplacien de E_p est-il partout nul ? Y a-t-il un lien avec la stabilité des points d'équilibre éventuels ? Ce système est-il stable verticalement, latéralement ? Connaissez-vous en pratique un exemple d'objet réel qui lévite sur ce principe ? Est-ce que c'est exactement un diamagnétique parfait ?

(b) Connaissez-vous d'autres domaines de la physique où l'on réalise ainsi une lévitation, c'est-à-dire que l'on maintient un objet au-dessus du sol sans le toucher directement ? En connaissez-vous des exemples réalisés en pratique ? Ont-ils des applications, existantes ou futures ?