2eme SCiences **p**roblemes du second degre

Résolution d'une équation du second degré :
Soit l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
I/ On calcul le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
1^er^cas : si $\Delta > 0$ alors (E) admette deux racines distinctes : $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Une factorisation de (E) : $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$.

2^éme^cas : si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admette une racine double : $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$
Une factorisation de (E) : $ax^2 + bx + c = a(x - x')^2 = a(x-x'')^2$.
3^éme^cas : si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admette pas de solutions. (E) ne se factorise pas.
II/ Cas particuliers :

◇Si $a + b + c = 0$ alors : $x' = 1$ et $x'' = \frac{c}{a}$

◇Si $a - b + c = 0$ alors : $x' = -1$ et $x'' = -\frac{c}{a}$
III/ Somme et produit :

Si x' et x'' existent alors : $S = \frac{-b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

EXERCICE N°1 :
I/ Résoudre dans IR puis factoriser les équations suivantes :

◇$x^2 + 3x - 10 = 0$ ◇$-4x^2 + x - 1 = 0$ ◇$\frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

◇$(x - 1)^2 - 3x - 7 = 0$ ◇$-2x^2 + 9x - 4 = 0$ ◇$-3x^2 + 7x - 4 = 0$

◇$2x^2 + 4x - 1 = 0$ ◇$2x^2 + 3x + 2 = 0$ ◇$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

◇$(\sqrt{2}+1)x^2 + x - \sqrt{2} = 0$ ◇$-4x^2 + (\pi+4)x - \pi = 0$ ◇$\pi x^2 + (1+\sqrt{3})x = 0$

II/ Résoudre dans IR les équations suivantes :

◇$\left|x^2 - x - 2\right| = \left|-2x^2 + 3x + 2\right|$ ◇$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$

◇$\frac{x+1}{x+3} = \frac{7x-13}{(x-1)(x+3)}$ ◇$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 8x + 5} = -\frac{1}{2}$

◇$\sqrt{2x+14} = x - 5$ ◇$\sqrt{-4x-3} = 2x + 3$

◇$\sqrt{2x-1} + 2 = x$ ◇$\sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{2-x}$

EXERCICE N°2 :
I/ Soit l'équation : $3x^2 - 5x + c = 0$, avec $c \in IR$.

Déterminer c pour que cette équation admette une solution double que l'on déterminera.

II/ Soit l'équation : $(m + 2)x^2 – 2(m – 1)x + 4 = 0$, $m \in IR$.

Déterminer les valeurs de m pour que cette équation admette une solution double que l'on déterminera.

EXERCICE N°3 :

Résoudre dans IR×IR les systèmes suivants :

$\begin{cases} x + y = 7 \\ x.y = 6 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x - y = 5 \\ x.y = -6 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{49}{6} \\ x.y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x.y = -4 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2|x| + \sqrt{y} = 9 \\ x^2.y = 100 \end{cases}$

EXERCICE N°4 :

Résoudre dans IR les équations suivants :

1/ $x^2 – 7x + 10 = 0$, déduire les solutions de l'équation : $x^2 – 7|x| + 10 = 0$.

2/ $x^2 + 8|x| - 9 = 0$

3/ $x^2 + 4x – 5 = 0$, déduire les solutions de l'équation : $(x – 3)^2 + 4(x – 3) – 5 = 0$

4/ $2x – 5\sqrt{x} + 3 = 0$

5/ $\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2 - \dfrac{8x}{x-2} + 15 = 0$

6/ $x^4 + 3x^2 – 4 = 0$

7/ $4x^4 – 9x^2 + 2 = 0$

EXERCICE N°5 :

I/ Soit dans IR l'équation : $x^2 + 5x – 7 = 0$

1/ Montrer sans calculer le discriminant que cette équation admette deux racines x' et x ".

2/ Sans calculer x' et x", déterminer :

x' + x" ; x'. x" ; $\dfrac{3}{x'} + \dfrac{3}{x"}$; $x'^2 + x"^2$; $(-2x' + 3)(-2x" + 3)$ et $x'^3 + x"^3$

II/ Soit l'équation (E_m) : $(m^2 + 1)x^2 – 2mx – 2 = 0$, $m \in IR$.

1/ Montrer sans calculer le discriminant que (E_m) admette deux racines distinctes.

2/ Déterminer m pour que l'une des racines soit égale à (-1) puis calculer l'autre racine.

3/ On prend m = 2, sans calculer x' et x" déterminer : A = $\dfrac{x'+1}{x"-1} + \dfrac{x"+1}{x'-1}$