Государственное казенное образовательное учреждение Ростовской области “Ростовская санаторная школа-интернат № 28”

Научно-исследовательская работа

Вокруг теорем Чевы и Менелая

Работу выполнила:

Трунова Мария Викторовна,

ученица 11Е класса

Руководитель:

Иванова Инна Николаевна,

учитель математики

Оглавление

Введение

При решении геометрических задач возникают трудности в нахождении алгоритма, приводящего к успеху. Нужны знания многочисленных соотношений между элементами геометрических фигур. «Умение смотреть и видеть, замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы из замеченных особенностей» И.Ф.Шарыгин.

За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника» как о самостоятельном разделе элементарной геометрии. Треугольник является важнейшей фигурой планиметрии, и потому в первую очередь изучают многочисленные свойства этой фигуры. Также треугольник является составной частью объемных фигур, а его свойства мы часто используем при решении различных задач. Среди теорем о треугольниках есть такие, изучение которых позволяет существенно расширить круг решения геометрических задач. Теоремы Чевы и Менелая помогают решать задачи более рационально, чем метод подобия и применения дополнительных построений.

Объект исследования: решение геометрических задач, связанных с нахождением отношений длин отрезков, площадей фигур.

Цель исследования: ознакомление с теоремами Чевы и Менела;

выяснить, насколько целесообразно их применение при решении задач на отношение отрезков и площадей фигур.

Задачи:

анализ литературы по данной теме;

рассмотреть доказательство теорем Чевы и Менелая;

сравнить способы решения задач с использованием теорем Чевы и Менелая и другими способами;

создать банк задач.

Историческая справка

Менелай Александрийский — древнегреческий математик и астроном, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере-первой неевклидовой геометрии. Время его жизни и деятельности определяется приведёнными в «Алмагесте» Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай произвёл в Риме в первом году царствования Траяна, то есть в 98 году после Р.Х.

Теорема Менелая - это классическая теорема аффинной геометрии. Эта теорема доказывается в третьей книге "Сферики". Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в несохранившихся "Поризмах" Евклида. Сферическая теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

Джованни Чева родился 7 декабря в 1647 году в Италии. Он окончил иезуитский колледж в Милане, после чего стал студентом Университета в Пизе , где позже и стал работать профессором математики. С 1686 года Чева работал в университете в Мантуе, оставаясь на этом посту до самого конца своей жизни. Большую часть жизни Чева изучал геометрию, стараясь возродить греческую геометрию; кроме того, сегодня его помнят и по изысканиям в области механики. В 1678-м Чева опубликовал свою, ставшую знаменитой, теорему «О взаимно пересекающихся прямых» о синтетической геометрии треугольника; теорема эта впоследствии получила его имя - теорема Чевы. Теорема эта сегодня является классической теоремой геометрии треугольника. Кстати, отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется чевианой - также по имени Джованни Чевы. Можно сказать, что эта теорема служит фундаментом всей геометрии треугольника. Джованни Чева умер 15 июня 1734 года, в возрасте 85 лет; смерть его последовала во время осады Мантуи франко-сардинской армией.

Формулировка и доказательство теоремы Чевы

Определение. Чевианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой противолежащей стороны или ее продолжения.

Теорема Чевы. Чевианы AF, BE и CD пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AD}{DB}\frac{AD}{DB}*\frac{BF}{CF}\frac{BF}{CF}*\frac{CE}{EA}\frac{CE}{EA}=1$.

Доказательство

Докажем, что если чевианы пересекаются в одной точке, то выполняется соотношение $\frac{BF}{EA}\frac{BF}{EA}*\frac{AD}{CF}\frac{AD}{CF}*\frac{CE}{BD}\frac{CE}{BD}=1$. Пусть чевианы AF, BE и CD треугольника ABC пересекаются в точке O

Рассмотрим треугольники BOFи COF.

Поскольку основания FB и FC лежат на одной прямой, то у этих треугольников общая высота, опущенная из точки O (из точки O можно опустить только одну высоту на прямую BC– см. чертеж.

Отсюда следует, что площади этих треугольников относятся так же, как их основания: $\frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}}\frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}}=\frac{BF}{FC}\frac{BF}{FC}$

Аналогично можно выписать еще два соотношения: $\frac{S_{AOD}}{S_{BOD}}\frac{S_{AOD}}{S_{BOD}}=\frac{AD}{BD}\frac{AD}{BD}$; $\frac{S_{EOC}}{S_{AOE}}\frac{S_{EOC}}{S_{AOE}}=\frac{CE}{AE}\frac{CE}{AE}$;

Перемножая эти три равенства получаем: $\frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}}\frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}}*\frac{S_{AOD}}{S_{BOD}}\frac{S_{AOD}}{S_{BOD}}*\frac{S_{EOC}}{S_{AOE}}\frac{S_{EOC}}{S_{AOE}}=\frac{BF}{FC}*\frac{AD}{BD}*\frac{CE}{AE}\frac{BF}{FC}*\frac{AD}{BD}*\frac{CE}{AE}$;

Рассмотрим левую часть данного равенства. Запишем её иначе. Треугольники BOF и AOE имеют равные углы (вертикальные, при вершине O – см. рисунок 6). Значит, их площади относятся как произведения длин сторон, заключающих этот угол.

То есть: $\frac{S_{BOF!}}{S_{AOE}}\frac{S_{BOF!}}{S_{AOE}}=\frac{BO*OF}{AO*OE}\frac{BO*OF}{AO*OE}$. Аналогично можно выписать еще два соотношения: .

$\frac{S_{AOD}}{S_{FOC}}\frac{S_{AOD}}{S_{FOC}}=\frac{AO*OD}{CO*OF}\frac{AO*OD}{CO*OF}$; $\frac{S_{EOC}}{S_{BOD}}\frac{S_{EOC}}{S_{BOD}}=\frac{EO*OC}{DO*OB}\frac{EO*OC}{DO*OB}$

Перемножая эти три равенства, получаем: $\frac{S_{BOF!}}{S_{AOE}} \frac{S_{BOF!}}{S_{AOE}} * \frac{S_{AOD}}{S_{FOC}} \frac{S_{AOD}}{S_{FOC}} * \frac{S_{EOC}}{S_{BOD}} \frac{S_{EOC}}{S_{BOD}} = 1$

Имеем: $\frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}} \frac{S_{BOF!}}{S_{FOC}} * \frac{S_{AOD}}{S_{BOD}} \frac{S_{AOD}}{S_{BOD}} * \frac{S_{EOC}}{S_{AOE}} \frac{S_{EOC}}{S_{AOE}} = \frac{BF}{FC} * \frac{AD}{BD} * \frac{CE}{AE} \frac{BF}{FC} * \frac{AD}{BD} * \frac{CE}{AE} = 1$

Что и требовалось доказать.

2) Теперь докажем, что если соотношение $\frac{BF}{AE} * \frac{AD}{FC} * \frac{CE}{BD} \frac{BF}{AE} * \frac{AD}{FC} * \frac{CE}{BD} = 1$ выполнено, то три чевианы пересекаются в одной точке. Воспользуемся методом от противного. Пусть это не так и O – точка пересечения AF и BE, а CD не проходит через эту точку. Проведем чевиану CC_2 через точки C и O (см. рисунок 7).

Тогда для чевиан CC_2, AE и BE выполняется условие теоремы Чевы, которое мы уже доказали: $\frac{AB_1}{BA_1} \frac{BC_2}{CB_1} \frac{CA_1}{AC_2} \frac{AB_1}{BA_1} \frac{BC_2}{CB_1} \frac{CA_1}{AC_2} = 1$.

Но с другой стороны известно, что $\frac{BF}{AE} * \frac{AC2}{FC} * \frac{CE}{BC2} \frac{BF}{AE} * \frac{AC2}{FC} * \frac{CE}{BC2} = 1$

Приравняв левые части двух равенств, имеем: $\frac{AD}{BD} = \frac{C2A}{BC2} \frac{AD}{BD} = \frac{C2A}{BC2}$

а значит две точки разбили один и тот же отрезок в одном и том же отношении. Единственный случай, когда это возможно, если D и C_2 совпадают. То есть исходное предположение неверно, и значит, все чевианы проходят через одну точку, ч.т.д.

Таблица 1.

Формулировка и доказательство теоремы Менелая

Если на сторонах AB и CB треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, а точка B_1 взята на продолжении стороны AC за точку C, то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{BC_1}\frac{AC_1}{BC_1}*\frac{BA_1}{CA_1}\frac{BA_1}{CA_1}*\frac{CB_1}{AB_1}\frac{CB_1}{AB_1}=1$$

Доказательство

Проведем через точку C прямую, параллельную AB. Обозначим буквой M ее точку пересечения с прямой B_1C_1. Треугольники AC_1B_1 и CMB_1 подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{AC_1}{CM}\frac{AC_1}{CM}=\frac{AB_1}{CB_1}\frac{AB_1}{CB_1}$

Треугольники CMA_1и BC_1A_1 также подобны, значит, $\frac{CM}{BC_1}\frac{CM}{BC_1}*\frac{CA_1}{BA_1}\frac{CA_1}{BA_1}$

Далее, перемножив полученные равенства, получим:

$\frac{AC_1}{BC_1}\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AB_1}{CB_1}\frac{AB_1}{CB_1}*\frac{CA_1}{BA_1}\frac{CA_1}{BA_1}$, откуда следует, что: $\frac{AC_1}{BC_1}\frac{AC_1}{BC_1}*\frac{BA_1}{CA_1}\frac{BA_1}{CA_1}*\frac{CB_1}{AB_1}\frac{CB_1}{AB_1}=1$. Теорема доказана.

Обратное утверждение доказывается абсолютно аналогично доказательству обратного утверждению из теоремы Чевы.

Таблица 2.

Применение теорем Чевы и Менелая для решения геометрических задач.

Дан треугольник MNP. На продолжении MP за точку P взяли точку B, такую что PB=2MP. На стороне MN взяли точку A, которая делит MN в отношении 2:1 от N. В каком отношении AB делит NP?

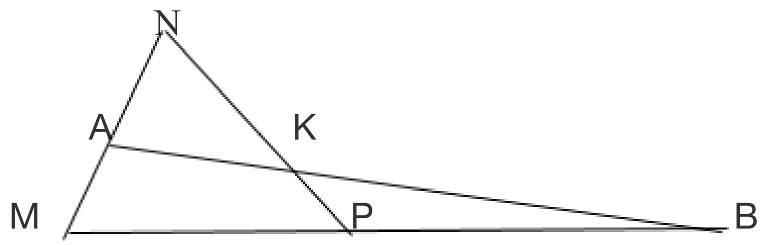


Рис. 1

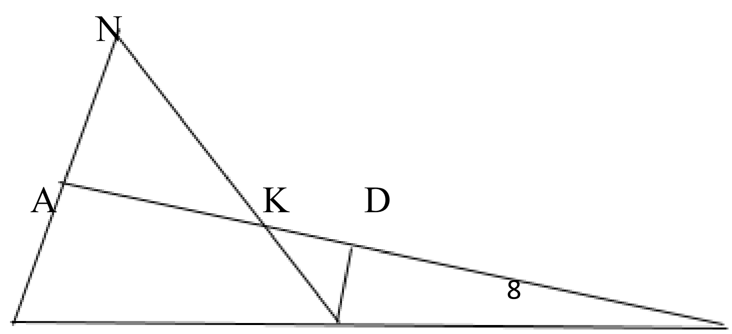
Решение:

Пусть точка пересечения AB и NB - (см. рисунок 1).

Тогда по теореме Менелая:

$\frac{MB*PK*NA}{PB*NK*MA}\frac{MB*PK*NA}{PB*NK*MA}=1$; $\frac{3}{2}\frac{3}{2}*\frac{PK}{NK}*\frac{2}{1}\frac{PK}{NK}*\frac{2}{1}=1$; $\frac{KP}{NK}=\frac{1}{3}\frac{KP}{NK}=\frac{1}{3}$.

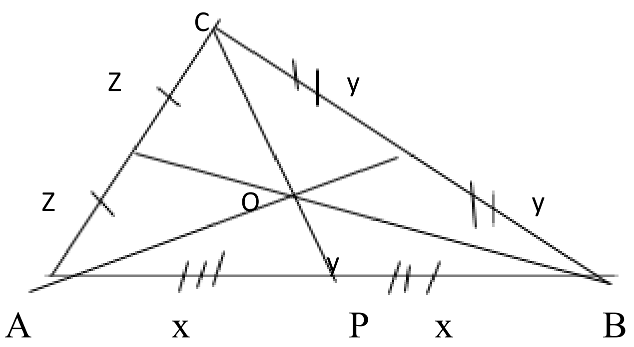
Ответ: $\frac{1}{3}\frac{1}{3}$.



M P B

Эту задачу можно решить и иначе. Проведем PD (D – на AB) параллельно MA. Треугольник ABM подобен треугольнику PBD (второй признак подобия треугольников). Тогда $\frac{MB}{BP}=\frac{MA}{PD}=\frac{3}{2}\,\frac{MB}{BP}=\frac{MA}{PD}=\frac{3}{2}$, $\frac{AM}{AN}\,\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$, значит,
$\frac{AN}{2PD}=\frac{3}{2}\,\frac{AN}{2PD}=\frac{3}{2}$, $\frac{AN}{PD}=3\,\frac{AN}{PD}=3$. Треугольник ANK подобен треугольнику KDP (второй признак подобия треугольников). Таким образом, $\frac{AN}{PD}=\frac{NK}{KP}=3$
$\frac{AN}{PD}=\frac{NK}{KP}=3$.

Как применяется теорема Чевы? Например, с ее помощью можно доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Действительно, соответствующие отрезки в числителе и знаменателе одинаковы, значит, условие теоремы выполняется (см. рис 2)



$\frac{x*y*z}{x*y*z}\,\frac{x*y*z}{x*y*z}=1$

Таблица 3.

Заключение

Использование теоремы Менелая и Чевы значительно упрощает решение задачи. Исследование, проведенное мной, способствовало развитию навыков самостоятельного применения знаний при решении задач, развитию логического мышления и математической речи, умению анализировать, сравнивать и обобщать.

Результатом исследования является презентация, набор задач и чертежы, выполненные в программе GeoGebra. Это поможет обучающимся познакомиться с методом решения задач на нахождение отношений длин отрезков и площадей фигур с помощью теорем Чевы и Менелая

Список используемой литературы

1. Атанасян Л.С. Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. Пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.:Просвещение, 1996. – 205с.
2. Вольфсон, , Б. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи / Б. И. Вольфсон, Л. И. Резницкий - Легион, 2011 г. – 129с.
3. Ефремов Д.М. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902. — 334 с.
4. Качалкина Е. Применение теорем Чевы и Менелая/Математика. Издательский дом «Первое сентября», 2004, - №13. – с.23-26

Приложение

Таблица1.

https://www.geogebra.org/m/xvp7dgwd	Теорема Чевы

Таблица2.

https://www.geogebra.org/m/mzwhpdjw	Теорема Менелая

Таблица3.

https://www.geogebra.org/m/tstj2gwa	Задачи на применение теоремы Менелая