	LYCEE PILOTE DE SOUSSE	*Devoir de synthèse N°1*	*CLASSE : 3ème Math*
	LE 4 / 12 / 2006	*MATHEMATIQUES*	*DUREE : 2 heures*

EXERCICE :1 (9 points)

Soit m un paramètre réel et soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{x^2+x-2} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{3x-6} & \text{si } 1\le x<2 \\ f(x)=\sqrt{x^2-4}+mx & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Déterminer le domaine de définition D de f.

2/ a) Déterminer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3/ Justifier que f est continue en 1.

4/ Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2.

5/ Pour la valeur de m trouvée au 4/ :

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation : $y=\dfrac{9}{8}x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ sur $[2,+\infty[$.

EXERCICE :2 (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\dfrac{21\pi}{4}\ (2\pi)$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1/ Tracer le triangle ABC et déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.

2/ Soit $\Gamma=\left\{M\in P / (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv-\dfrac{\pi}{8}\ (\pi)\right\}$. Prouver que $\Gamma=(\mathcal{C})\setminus\{A,B\}$.

3/ Soit N un point de Γ , la perpendiculaire à la droite (AN) issue de C coupe la droite (BN) en Q.

a) Montrer que : $(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QC})\equiv(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NA})+\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

b) En déduire que lorsque N varie sur Γ , le point Q varie sur une ligne fixe Γ 'que l'on précisera. Construire Γ '.

EXERCICE :3 (7 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit OAB un triangle quelconque et soit I le pied de sa hauteur issue de O. On considère une droite variable Δ passant par O et on désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur Δ .

1/ Montrer que lorsque Δ varie, le point M se déplace sur un cercle fixe (C_1) et le point N sur un cercle fixe (C_2) que l'on précisera , tracer (C_1) et (C_2) .

2/ On suppose que Δ est distincte de (OI). Montrer que $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN})\equiv(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})\ (\pi)$.

3/ Soit K le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Donner une mesure de $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IK})$.

4/ On suppose que Δ est aussi distincte de (OA).Les droites (AM) et (KN) se coupent en R.

a) Montrer que $(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NK})\equiv(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OK})\ (\pi)$

b) En déduire que R appartient au cercle (C_3) circonscrit au triangle AKI.

c) Montrer que les droites (IR) et (IN) sont perpendiculaires.

5/ Soit N' le point diamétralement opposé à N sur (C_2) et R' le point diamétralement opposé à R sur (C_3).

a) Montrer que les points K, N' et R' sont alignés.

b) En déduire que les droites (NN') et (RR') sont perpendiculaires.

