

	LYCEE PILOTE DE SOUSSE LE 4 / 12 / 2006	Devoir de synthèse N°1 MATHEMATIQUES	CLASSE : 3^{ème} Math DUREE : 2 heures
---	--	---	---

EXERCICE :1 (9 points)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{3x - 6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + mx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Soit m un paramètre réel et soit f la fonction définie par :

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j)

1/ Déterminer le domaine de définition D de f .

2/ a) Déterminer les limites éventuelles suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3/ Justifier que f est continue en 1.

4/ Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2.

5/ Pour la valeur de m trouvée au 4/ :

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = \frac{9}{8}x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ sur $[2, +\infty[$.

EXERCICE :2 (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{21\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que :

On désigne par (C) le cercle circonscrit au triangle ABC .

1/ Tracer le triangle ABC et déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

2/ Soit $\Gamma = \left\{ M \in P / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{8} \pmod{\pi} \right\}$. Prouver que $\Gamma = (C) \setminus \{A, B\}$.

3/ Soit N un point de Γ , la perpendiculaire à la droite (AN) issue de C coupe la droite (BN) en Q .

$$(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) \equiv (\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NA}) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

a) Montrer que :

b) En déduire que lorsque N varie sur Γ , le point Q varie sur une ligne fixe Γ' que l'on précisera. Construire Γ' .

EXERCICE :3 (7 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit OAB un triangle quelconque et soit I le pied de sa hauteur issue de O . On considère une droite variable Δ passant par O et on désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur Δ .

1/ Montrer que lorsque Δ varie, le point M se déplace sur un cercle fixe (C_1) et le point N sur un cercle fixe (C_2) que l'on précisera, tracer (C_1) et (C_2) .

2/ On suppose que Δ est distincte de (OI) . Montrer que $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \pmod{\pi}$.

3/ Soit K le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) . Donner une mesure de $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IK})$.

4/ On suppose que Δ est aussi distincte de (OA) . Les droites (AM) et (KN) se coupent en R .

a) Montrer que $(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NK}) \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OK}) \pmod{\pi}$

- b) En déduire que R appartient au cercle (C_3) circonscrit au triangle AKI.
 c) Montrer que les droites (IR) et (IN) sont perpendiculaires.
- 5/ Soit N' le point diamétralement opposé à N sur (C_2) et R' le point diamétralement opposé à R sur (C_3) .
- a) Montrer que les points K, N' et R' sont alignés.
 b) En déduire que les droites (NN') et (RR') sont perpendiculaires.

