Лекция

Теоретические основы

гидростатики

3.1 Свойства гидростатического давления и основной закон гидростатики

<u>Гидростатикой</u> называется раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы, справедливые для покоящихся жидкостей. В неподвижной жидкости возникают только напряжения сжатия и не могут действовать касательные напряжения, так как любое касательное напряжение жидкости вызовет ее движение, т.е. нарушит состояние покоя.

В гидростатике изучаются законы равновесия жидкости, находящейся в абсолютном покое, под действием внешних и внутренних сил, а также условия равновесия тел, погруженных в жидкость.

Основным понятием гидростатики является понятие гидростатического давления.

$$p_{\text{ср}} = \lim_{F\to 0}\left(\frac{P}{F}\right)$$

При уменьшении значения площади F до нуля значение среднего гидростатического давления будет стремиться к определенному пределу, называемому гидростатическим давлением в точке или просто гидростатическим давлением *p*.

Единица измерения гидростатического давления 1 Па = 1 Н/м^2

10^3Па = 1 кПа,

10^6Па = 1 МПа,

1 атм = 1 бар = 0,1 МПа = 100 кПа.

Напряжения сжатия вызывает сила, действующая перпендикулярно на бесконечно малую площадку. Отсюда вытекает

<u>первое свойство гидростатического давления</u>: на внешней поверхности жидкости давление создает силу, действующую по нормали внутрь рассматриваемого объема жидкости. Причем под внешней поверхностью жидкости следует понимать не только свободные поверхности жидкости и стенки сосудов, но и поверхности объемов, выделяемых в жидкости.

<u>Второе свойство гидростатического давления</u> состоит в том, что в любой точке внутри покоящейся жидкости гидростатическое давление действует по всем направлениям одинаково, т.е. давление есть скалярная величина.

Исходя из этих свойств гидростатического давления, можно получить основной закон гидростатики. Пусть жидкость находится в сосуде, а на ее свободную поверхность действует давление p_0 (рис. 1). Определим давление *p* в произвольно выбранной точке, которая находится на глубине h.

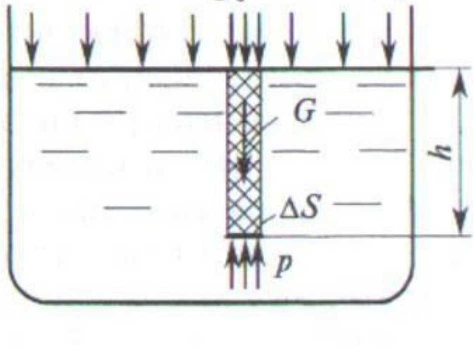

Рисунок 1 – Схема для вывода основного уравнения гидростатики

Для определения искомого давления p вокруг произвольно выбранной точки возьмем бесконечно малую горизонтальную площадку ΔS и построим на ней цилиндр до открытой поверхности жидкости. На выделенный объем жидкости сверху вниз действуют сила, равная произведению давления p_0 на площадь ΔS, и вес выделенного объема жидкости G. В выбранной точке искомое давление p действует по всем направлениям одинаково (второе свойство гидростатического давления). Но на выделенный объем создаваемая этим давлением сила действует по нормали к поверхности и направлена внутрь объема (первое свойство гидростатического давления), т.е. сила направлена вверх и равна произведению p на площадь ΔS. Тогда условием равновесия выделенного объема жидкости в вертикальном направлении будет равенство

$$p\Delta S - G - p_0\Delta S = 0$$

Вес G выделенного цилиндра жидкости можно определить, подсчитав его объем W

$$G = W \cdot \rho \cdot g = \Delta S \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

Подставив математическое выражение для G в уравнение равновесия и решив его относительно искомого давления p, окончательно получим

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g \tag{2.1}$$

Полученное уравнение называют **основным законом гидростатики**. Оно позволяет подсчитать давление в любой точке внутри покоящейся жидкости.

Кроме того, из анализа зависимости этой формулы следует, что давление, действующее на свободной поверхности жидкости, будет передаваться в любую точку внутри жидкости. Это позволяет сформулировать ***<u>закон Паскаля</u>*: *давление, приложенное к жидкости, передается по всем направлениям одинаково.***

Основной закон гидростатики широко применяется для решения практических задач. Однако при его использовании в практических расчетах следует обращать особое внимание на высоту h, так как она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Действительно, ***если точка, в которой определяем давление, располагается ниже точки с исходным давлением, то в математической записи основного закона гидростатики ставится знак «+», как в формуле (2.1). А в том случае, когда точка, в которой определяем давление, располагается выше точки с исходным давлением, и уравнении знак «+» изменяется на «-»***, т.е.

$$p = p_0 - h \cdot \rho \cdot g \tag{2.2}$$

При выборе знака в основном законе гидростатики всегда следует помнить, что чем ниже (глубже) располагается точка в данном жидкости, тем больше давление в этой точке.

В заключение следует добавить, что основной закон гидростатики широко используется при измерении давлений.

3.2 Сила давления на плоскую стенку

До сих пор рассматривались давления, действующие в жидкости. Однако более важное практическое значение имеют силы, возникающие от действия жидкости на различные стенки.

При определении силы, действующей со стороны жидкости на плоскую стенку, рассмотрим общий случай, когда стенка наклонена к горизонту под углом α, а на свободную поверхность жидкости действует давление p_0 (рис. 2).

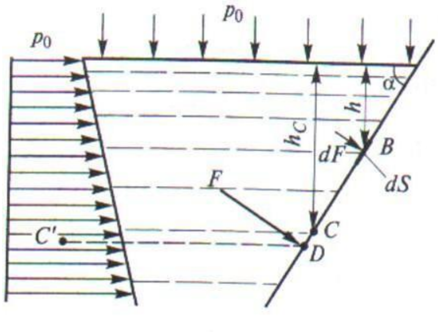

Рисунок 2 – Схема для определения силы на плоскую стенку

В этом случае использовать зависимость p=F/S для определения силы F не представляется возможным, так как давление изменяется по высоте стенки и неизвестно, какое его значение следует использовать для вычислений. В соответствии с основным законом гидростатики эпюра распределения давления по высоте носит линейный характер и его значение нарастает с увеличением глубины (см. рис. 2).

Для определения силы F вокруг произвольно выбранной точки *B* на глубине h выделим бесконечно малую площадку *dS.* На эту площадку будет действовать бесконечно малая сила *dF.* В пределах выбранной бесконечно малой площадки давление *p* можно считать постоянным. Тогда силу *dF* найдем:

$$dF=pdS.$$

Полную силу *F,* действующую на наклонную стенку, определим, как сумму бесконечно малых сил *dF,* т.е. проинтегрируем выражение для *dF* по площади S:

$$F = \int_S pdS$$

При интегрировании давление *p* вычислим по основному закону гидростатики, т.е. (2.1) подставим в формулу для определения силы:

$$F = \int_S (p_0 + h\rho g)dS$$

Далее проведем необходимые преобразования, после которых получим

$$F = (p_0 + h_C\,\rho g)S$$

где h_C — глубина расположения центра тяжести площади стенки. Анализ математического выражения, записанного в скобках, позволяет сделать вывод, что это давление в центре тяжести площади стенки находится в точке *C* на рис. 2. Действительно, в соответствии с (2.1)

$$p_c = p_o + h_C\rho g$$

После математических преобразований окончательно получим

$$F = p_c S \tag{2.4}$$

Зависимость (2.4) позволяет сделать вывод, что

сила, действующая со стороны жидкости на любую плоскую стенку, всегда равна произведению давления в центре тяжести площади этой стенки и ее площади.

Точка приложения силы F называется <u>центром давления</u> (точка D на рис. 2). В большинстве случаев он лежит ниже центра тяжести стенки C.

В частном случае, когда давление на свободной поверхности p_0 существенно больше, чем $h_C\rho g$, можно считать, что центр давления D совпадает с центром тяжести C.

Определение положения центра давления иногда может быть достаточно затруднительным. ***При прямоугольной форме наклонной стенки он совпадает с геометрическим центром тяжести плоской эпюры распределения давлений*** (точка C' на рис. 2).

Ранее было отмечено, что смещение центра давления относительно центра тяжести вызвано нарастанием давления по глубине $h\rho g$. В машиностроительных гидросистемах обычно действуют достаточно высокие давления при относительно небольших изменениях высот h. Поэтому в большинстве случаев точку приложения силы, действующей со стороны жидкости, считают совпадающей с центром тяжести стенки.

3.3 Сила давления на криволинейные стенки. Плавание тел

Рассмотрим силу, действующую на криволинейную цилиндрическую стенку, которая погружена в жидкость так, что ее образующие параллельны свободной поверхности жидкости (рис. 3). Такие стенки распространены на практике. В этом случае задача может быть сведена к определению равнодействующей силы, лежащей в вертикальной плоскости, перпендикулярной образующим цилиндрической поверхности. Определение этой силы сводится к определению ее вертикальной и горизонтальной составляющих.

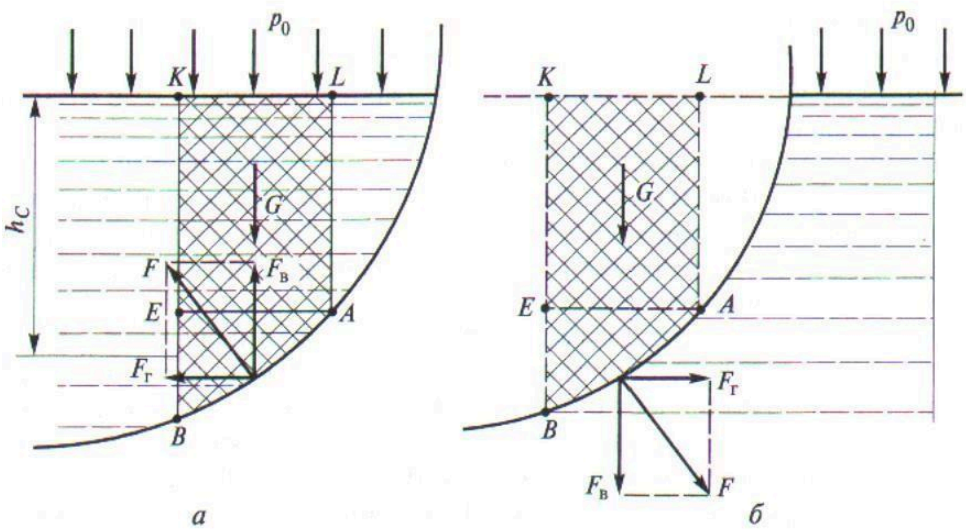

Рисунок 3 – Схема распределения силы давления на криволинейную поверхность в случае расположения жидкости над (а) и под (б) криволинейной поверхностью

В пределах цилиндрической поверхности (см. рис. 3) выделим участок AB и найдем силу F, действующую на этот участок при условии, что на свободной поверхности жидкости существует давление p_0. Причем определим эту силу для двух случаев: жидкость расположена над цилиндрической поверхностью (см. рис. 3, а) и под ней (см. рис. 3, *б)*. При определении силы, действующей на стенку, будем учитывать, что со стороны стенки на жидкость действует такая же сила, но в противоположном направлении.

Для определения силы F в первом случае (см. рис. 3, *а)* выделим объем жидкости, ограниченный поверхностью AB и вертикальными плоскостями, проходящими через границы выбранного участка. На рис. 3, *а* эти плоскости отображены линиями AL и BK. Рассмотрим условия равновесия выделенного объема в вертикальном и горизонтальном направлениях, из которых найдем вертикальную $F_в$ и горизонтальную $F_Г$ составляющие силы F.

На выделенный объем жидкости в вертикальном направлении, кроме силы $F_в$, действуют его вес G и сила давления на свободную поверхность, равная произведению давления p_0 на площадь горизонтальной проекции поверхности *AB,* обозначаемую Sг. Тогда из условия равновесия найдем вертикальную составляющую

$$F_в = p_o S_Г + G. \qquad (2.5)$$

При рассмотрении условия равновесия в горизонтальном направлении будем считать, что силы, действующие на поверхности *EK* и *AL,* взаимно уравновешены. Следовательно, на выделенный объем жидкости в горизонтальном направлении, кроме искомой силы $F_Г$, действует только сила давления на площадь вертикальной проекции поверхности *AB,* обозначаемую $S_В$. Ее найдем по формуле (2.4):

$$F_Г = P_c S_в = (P_o + h_c \rho g) S_в \qquad (2.6)$$

где h_c — глубина погружения центра тяжести поверхности *AB;* $S_В$ — площадь поверхности *BE.*

Определив по формулам (2.5) и (2.6) вертикальную $F_в$ и горизонтальную $F_Г$ составляющие силы *F,* найдем ее численное значение по зависимости

$$F = \sqrt{F_в^2 + F_Г^2}$$

Зависимости (2.5)...(2.7) получены для случая с расположением жидкости над криволинейной поверхностью. Очевидно, что при расположении жидкости снизу относительно стенки (см. рис. 3, *б)* давления в соответствующих точках будут точно такими, как и в первом случае. Поэтому и силы, действующие на стенку (полная сила и ее вертикальная и горизонтальная составляющие), будут такими же по значению. Но направления этих сил будут противоположными, так как жидкость действует на стенку с обратной стороны. Таким образом, формулы (2.5)...(2.7) будут справедливы и для этого случая. При этом в формулу (2.5) входит та же величина *G,* т.е. вес жидкости, которая заняла бы объем *ABKL* (выделен на рис. 3, *б*).

Полученные зависимости справедливы для цилиндрической поверхности, которая погружена в жидкость так, что ее образующие параллельны свободной поверхности. Аналогичным образом могут быть получены формулы для произвольной криволинейной поверхности. Их отличие будет в том, что полная сила F будет равна векторной сумме не двух составляющих сил (как в предыдущем случае), а трех. Причем одна из этих составляющих будет вертикальной, а две — горизонтальными и взаимно-перпендикулярными.

Определение положения точки приложения силы F, действующей на криволинейную стенку, является весьма сложной задачей, которая решается с использованием графических или численных (компьютерных) методов. Определение положения точки приложения силы F, действующей на поверхность вращения (например, цилиндрическую), упрощается, так как в этом случае линия действия силы F проходит через ось вращения поверхности.

Важной задачей при решении некоторых практических вопросов является определение силы, выталкивающей тело, погруженное в жидкость. На рис. 4, *а* изображено тело произвольной формы, погруженное в жидкость.

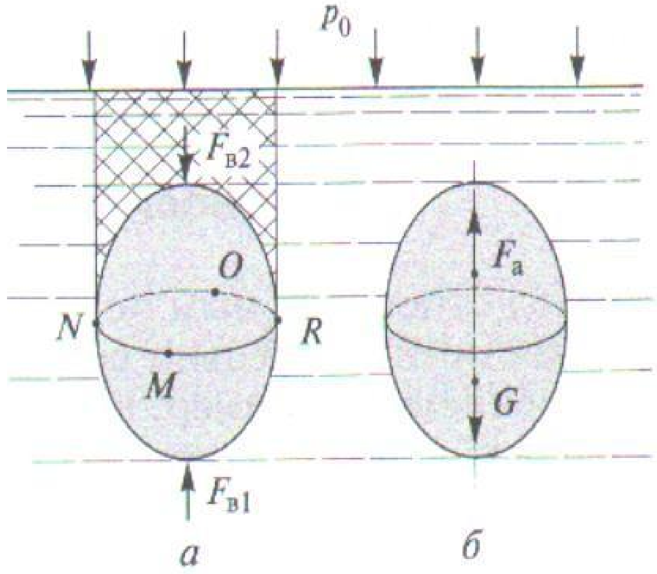

Рис. 4. Схема плавания тел: а – для определения архимедовой силы; б – пример устойчивого положения тела

Рассмотрим силы, действующие на это тело в вертикальном направлении.

При рассмотрении сил, действующих на тело, условно разделим его замкнутой линией *MNOR* на две части: верхнюю и нижнюю. Причем линия разделения *MNOR* проведена так, что ее проекция и проекция тела на свободную поверхность жидкости (т.е. вертикально вверх) полностью совпадают. Обозначим вес жидкости, расположенной над телом, G_0 (на рис. 4, *а* выделена штриховкой), а вес жидкости, вытесненной телом, — G, т.е. это вес жидкости, которая заняла бы объем погруженного тела (на рис. 4, *а* выделен затемнением).

Вертикальную силу (см. рис. 4, *а),* действующую на нижнюю поверхность тела, определим с использованием формулы (2.5):

$$F_{в1} = p_0 S_г + G_0 + G$$

где $S_г$ — площадь горизонтальной проекции тела на свободную поверхность жидкости.

Таким же образом найдем вертикальную силу (см. рис. 2.6, а), действующую на верхнюю часть тела:

$$F_{в2} = p_0 S_г + G_0 \qquad (2.9)$$

Их равнодействующая сила F_a, направленная вверх, будет равна алгебраической сумме этих сил и с учетом (2.8) и (2.9) определяется по формуле

$$F_a = F_{в1} - F_{в2} = G$$

Силу F_a принято называть архимедовой силой, а полученную для ее определения зависимость — ***<u>законом Архимеда</u>*, согласно которому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вверх и равная весу жидкости, вытесненной телом.**

Точкой приложения этой силы является геометрический центр тела, который называется центром водоизмещения. Он может не совпадать с центром тяжести тела. Эти центры совпадают, если тело состоит из однородного и равномерно распределенного вещества. Плавающее тело будет находиться в устойчивом равновесии, когда центр водоизмещения располагается выше центра тяжести тела, и они лежат на одной вертикальной прямой (см. рис. 4, *б).*

3.4 Относительный покой жидкости

Под <u>относительным покоем</u> понимают неподвижное состояние жидкости относительно сосуда, который движется с постоянным ускорением. Например, в относительном покое может находиться жидкость в емкости, которая установлена на разгоняющейся транспортной машине (топливный бак автомобиля). В относительном покое будет также находиться жидкость в сосуде, вращающемся с постоянной скоростью.

Законы, действующие при относительном покое жидкости, принципиально не отличаются от ранее рассмотренных законов гидростатики. Но если в ранее рассмотренных случаях на жидкость действовала только одна массовая сила — сила тяжести, то при относительном покое появляется новая — сила инерции. Это приводит к изменению положения свободной поверхности жидкости и изменению давлений в различных ее точках.

Анализ относительного покоя удобно проводить для сил, действующих на условную частицу жидкости единичной массы (массой m = 1). При таком подходе сила всегда численно равна соответствующему ускорению. Например, на частицу единичной массы действует сила тяжести $G = mg = 1g8 = g$ Таким образом, математические зависимости существенно упрощаются.

Рассмотрим прямолинейное движение сосуда с постоянным ускорением (или замедлением) a. В этом случае на каждую частицу жидкости единичной массы действуют две силы: сила тяжести g и сила инерции a (рис. 5).

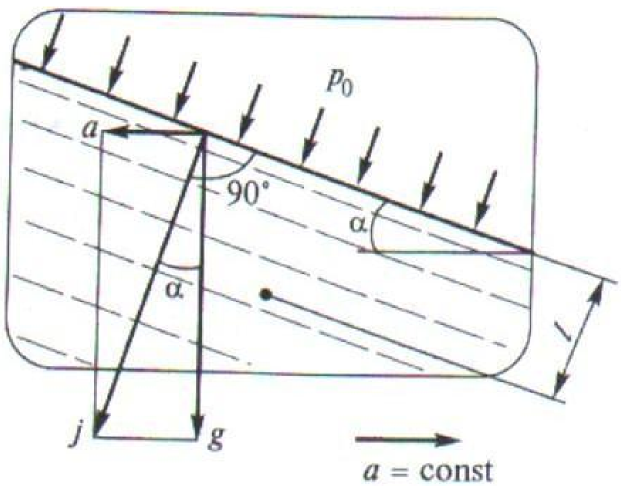

Рисунок 5 – Схема действия сил при прямолинейном движении сосуда

Равнодействующая этих двух сил

$$j = \sqrt{a^2 + g^2} \tag{2.10}$$

определяет положение свободной поверхности жидкости, так как угол между этой поверхностью и силой j всегда составляет 90°. Из геометрических соображений (см. рис. 5) следует, что положение свободной поверхности может быть задано углом α, значение которого найдем из отношения

$$\mathrm{tg}\alpha = a/g$$

Для определения давления в произвольно выбранной точке на расстоянии l от свободной поверхности используется математическая зависимость

$$p = p_o + l\rho j. \tag{2.11}$$

Она получена тем же методом, что и основной закон гидростатики, но учитывает действие не только сил тяжести, но и сил инерции.

Эта зависимость является более общей, чем основной закон гидростатики, который может быть получен из нее как частный случай. Действительно, при $a = 0$ из (2.10) следует $j = g$. Тогда с учетом $l = h$ из (2.11) получим формулу (2.1), т.е. основной закон гидростатики.

Другим случаем относительного покоя жидкости является вращение сосуда с постоянной угловой скоростью ω (рис. 6).

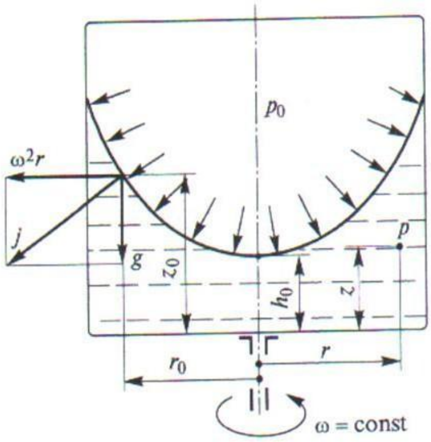

Рисунок 6 – Схема действия сил при вращении сосуда (общий случай)

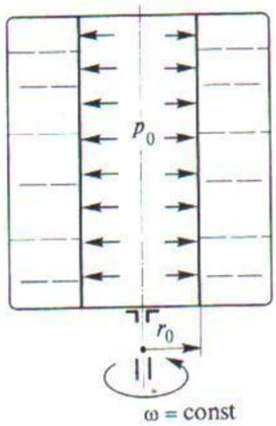

Рисунок 7 – Расположение жидкости в сосуде, вращающемся с высокой скоростью (частный случай)

При вращении на каждую частицу жидкости единичной массы, расположенную на радиусе *r*, также действуют две силы: сила тяжести и сила инерции, вызванная центробежным ускорением, $a = \omega^2 r$. Равнодействующая этих двух сил

$$j = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + g^2}$$

определяет положение свободной поверхности жидкости. Но в рассматриваемом случае центробежное ускорение является переменной величиной, так как зависит от радиуса расположения точки. Поэтому поверхность вращения принимает параболическую форму и описывается уравнением

$$z_0 = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

где z_0 — высота расположения точки свободной поверхности относительно дна сосуда;
h_0 — высота жидкости на оси вращения.

После математических преобразований найдем давление в точке, расположенной на радиусе *r* и высоте z относительно дна сосуда:

$$p = p_0 + \left[h_0 - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right]\rho g \tag{2.12}$$

Из формулы (2.12), так же как и из (2.11), можно получить основной закон гидростатики как частный случай, если принять $\omega = 0$ и обозначить $h = h_0 - z$.

На практике часто встречается другой частный случай — вращение сосуда с очень высокой скоростью. В этом случае центробежные силы существенно больше сил тяжести и жидкость отбрасывается центробежными силами к стенкам сосуда (рис. 7), а ее свободная поверхность располагается на радиусе r_0. Тогда некоторыми геометрическими величинами, входящими в (2.12), можно пренебречь и формула для определения давления упрощается:

$$p = p_0 + \frac{\omega^2 (r^2 - r_0^2)}{2}\rho \tag{2.13}$$

Следует отметить, что формула (2.12) получена для сосуда, имеющего вертикальную ось вращения, а формула (2.13) применима для вращающихся сосудов с любым расположением оси в пространстве.