



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022–2023
Convocatoria: Ordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculan integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que lo proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f , en caso de que existan

Resolución

El denominador se anula para $x = 1$, $x = 2$. Luego, el dominio es $\mathbb{R} - \{1; 2\}$

$$f(x) = \frac{1}{(1-2)(1-1)} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1 \text{ cuya ecuación es A.V. : } x = 1$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{1}{(-1)0^-} = +\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{(-1)0^+} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{2}{(2-2)(2-1)} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 2 \text{ cuya ecuación es A.V. : } x = 2$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{2}{0^-.1} = -\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{2}{0^+.1} = +\infty$$

Estudiemos las asíntotas en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Luego, } f \text{ tiene asíntota horizontal en } \pm\infty$$

cuya ecuación es A.H. : $y = 0$ (eje X)

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} - 0 = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, si los hubiera.

Resolución

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 3x + 2) - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ó } x = \sqrt{2}$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 1)$	1	$(1, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	$\nexists$	creciente	máximo	decreciente	$\nexists$	decreciente

f es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) - \{2\}$ y creciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{1\}$

Mínimo relativo: $x = -\sqrt{2} \cong -1,4$, $y = f(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})^2 - 3(-\sqrt{2}) + 2} = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} \cong -0,2$

Máximo relativo: $x = \sqrt{2} \cong 1,4$, $y = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \cong -5,8$

2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$

Resolución

Hallamos los puntos de corte entre las parábolas

$$\{y = x^2 - 2x + 1 \text{ y } y = -2x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 ; x = \frac{4 \pm 2}{6}, x = 1 ; x = \frac{1}{3}$$

Para $x = 1$, $y = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 0$ y para $x = \frac{1}{3}$, $y = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$.

Se cortan en $(0, 0)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right)$

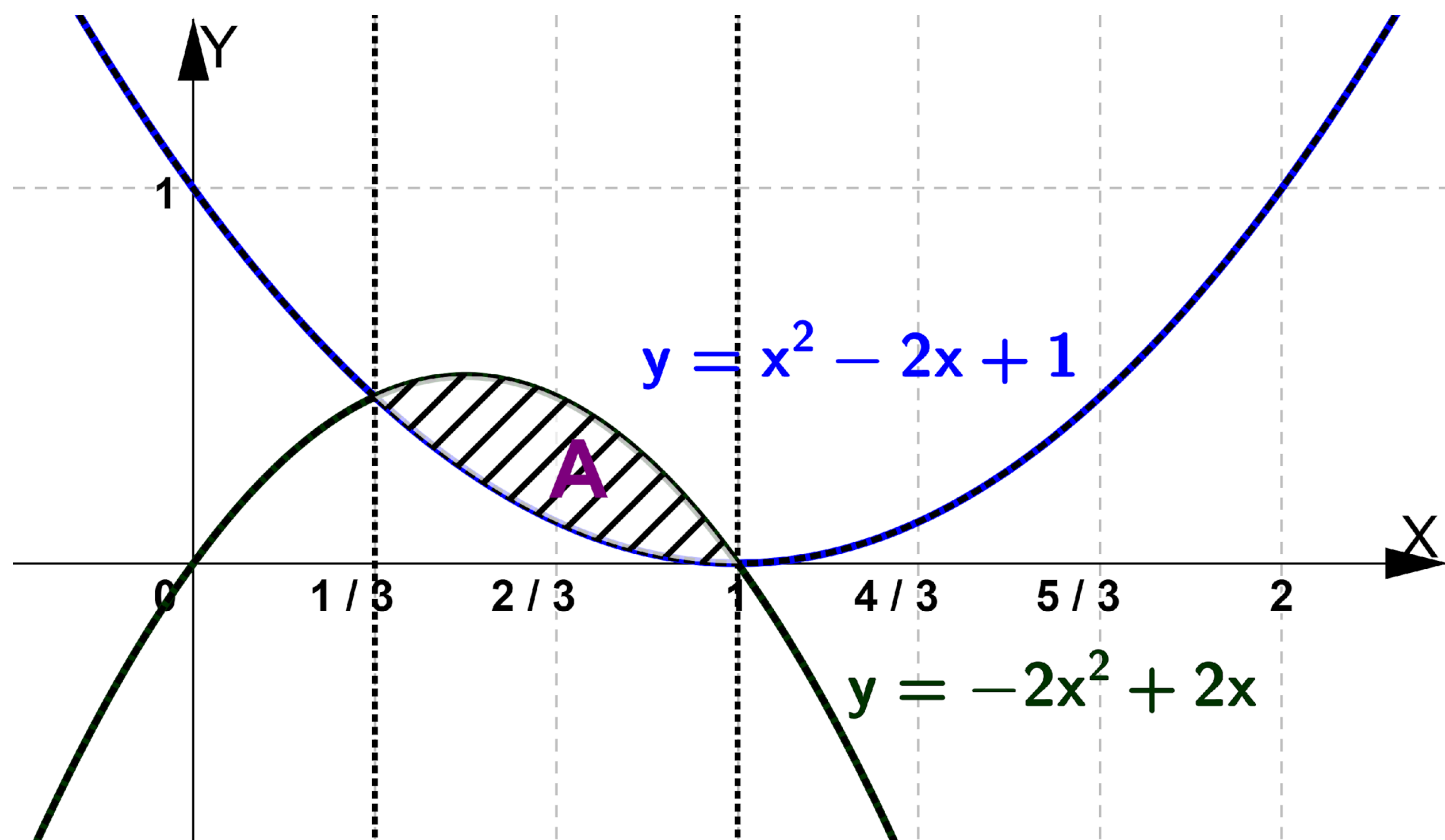
$y = -2x^2 + 2x$ es una parábola cóncava ; $-2x^2 + 2x = 2x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow$ corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(1, 0)$

$$(-2x^2 + 2x)' = -4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, y = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{el vértice es } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$y = x^2 - 2x + 1$ es una parábola convexa ; $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
 para $x = 0$, $y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ corta a los ejes en $(1, 0)$ y $(0, 1)$

$$(x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{el vértice es } (1, 0)$$

El recinto cuya área se pide es



$$\text{El área que se pide es } A = \int_{1/3}^1 [-2x^2 + 2x - (x^2 - 2x + 1)] dx = \int_{1/3}^1 (-3x^2 + 4x - 1) dx$$

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = -x^3 + 2x^2 - x$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(1) - p\left(\frac{1}{3}\right) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{27} \cong 0,15 \text{ u}^2$$

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $(e^x + x^3)^{1/x}$

Resolución

$$(e^x + x^3)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x + x^3)^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \frac{\ln(e^0 + 0^3)}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\frac{[\ln(e^x + x^3)]'}{(x)'} = \frac{\frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}}{1} = \frac{e^0 + 3 \cdot 0^2}{e^0 + 0^3} = 1. \text{ Por L'Hôpital, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = 1$$

Por tanto, el límite que se pide vale $e^1 = e$

(ii) $\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2} \right)$

Resolución $\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2} \right) = \frac{(x^2-1)(x-2) - (x^2+1)(x+2)}{x^2-4} = \frac{-4x^2-2x}{x^2-4} = -4$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real “a” y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado:

$$\begin{cases} x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & a+1 & a & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 + (a+1)^3 + 1 - a - 1 - a - 1 - a - 1 = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = -3$$

– Si $a \neq 0, a \neq -3$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Usamos la regla de Cramer para resolverlo:

$$A_x = \begin{pmatrix} a & a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & a & a \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

$$|A_x| = |a \ a+1 \ 1 \ a| = a|1 \ a+1 \ 1 \ a| = a|1 \ a+1 \ 1 \ a| \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - f_1 = a|1 \ a+1 \ 0 \ -a|$$

$$|A_y| = |1 \ a \ 1 \ a| = a|1 \ 1 \ a \ a| = a|1 \ 1 \ 1 \ a+1| \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - f_1 = a|1 \ 1 \ 0 \ 0| = aa$$

$$|A_z| = |1 \ a \ 1 \ a| = a|1 \ a \ 1 \ a| = a|1 \ a \ 1 \ a| \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - f_1 = a|1 \ a \ 1 \ 0| = a(a-1)$$

$$\text{La solución es } x = \frac{A_x}{\det A} = \frac{a^3}{a^2(a+3)} = \frac{a}{a+3}; \quad y = \frac{A_y}{\det A} = \frac{a^3}{a^2(a+3)} = \frac{a}{a+3};$$

$$z = \frac{A_z}{\det A} = \frac{a^3}{a^2(a+3)} = \frac{a}{a+3}$$

– Si $a = 0$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $(1 \ 1 \ 1)$. Luego, $\text{rg } A = 1$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $(1 \ 1 \ 1 \ 0)$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde a la ecuación $x + y + z = 0$.

Llamando $y = \alpha, z = \beta, x = -y - z = -\alpha - \beta$. Las infinitas soluciones son $\{x = -\alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

– Si $a = -3$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 + 2f_1 \quad (1 \ -2 \ 1 \ -3 \ 0) \quad f_3 - 3f_1 \quad (1 \ -2 \ 1 \ -3 \ 0) \quad f_3 - 3f_1 \quad (1 \ -2 \ 1 \ -3 \ 0)$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = -9$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2, calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

- (i) se traspone la matriz (ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna
 (iii) se multiplica la tercera columna por -4 (iv) se multiplica toda la matriz por 4

Resolución

(i) Usando propiedades de los determinantes, $\det(A^t) = \det A = 2$.

(ii) Usando propiedades de los determinantes sabemos que el determinante cambia de signo. Luego, el nuevo determinante valdría -2 .

(iii) Por las propiedades de los determinantes tenemos que el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por -4 , es decir, vale -8 .

(iv) Usando propiedades de los determinantes sabemos que el determinante de la nueva matriz es $4^4 \cdot \det A = 4^4 \cdot 2 = 512$

6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real "a" la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ -1 & a^2 & -1 & 1 \\ 1 & a^2 & -1 & a \\ a & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Resolución

$$\det A = (a^2 - 1)(a + 1) + a^2 - 1 - (a - 1) - (a - 1)(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 1) - (a - 1) =$$

$$= (a - 1)[(a + 1)^2 - 1] = (a - 1)(a^2 + 2a) = (a - 1)a(a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ó } a = 0 \text{ ó } a = -2$$

Luego, A tiene inversa sólo para $a \neq 1$, $a \neq 0$ y $a \neq -2$

Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que A es invertible y $\det A = (2 - 1)2(2 + 2) = 8 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A)^t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 8 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta $\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$ y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$

Resolución

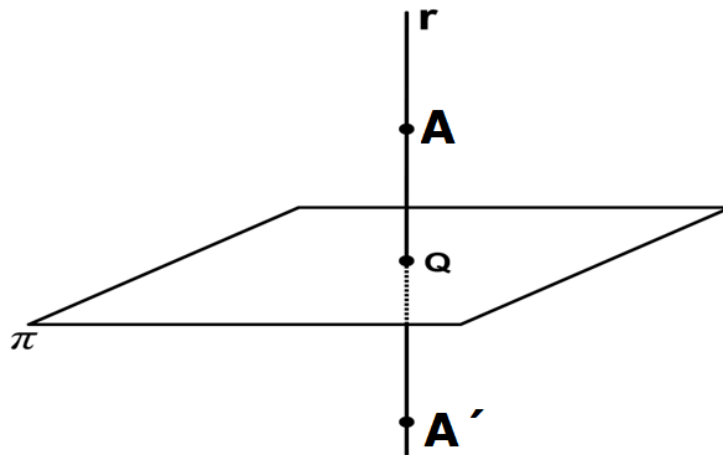
Un vector normal de π es $\vec{n} = (3, 2, -11)$; un vector director de r es $\vec{d} = (0, 1, 1)$

$\vec{d} \cdot \vec{n} = (3, 2, -11) \cdot (0, 1, 1) = 2 - 11 = -9 \neq 0$ y como $\vec{d} \nparallel \vec{n}$, entonces r y π son secantes no perpendiculares.

8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto A(0, 2, 3) respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$

Resolución

A(0, 2, 3) $\notin \pi$: $x + y - z = 4$ porque no cumple su ecuación ($0 + 2 - 3 = -1 \neq 4$).



Un vector director de r es el vector normal del plano, $\vec{d} = \vec{n} = (1, 1, -1)$ y $A \in r \Rightarrow$
 $r: \{x = t, y = 2 + t, z = 3 - t\}$

Hallamos el punto de corte, Q , entre el plano y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $t + 2 + t - 3 + t = 4$; $t = \frac{5}{3}$,

$$\{x = \frac{5}{3}, y = 2 + \frac{5}{3}, z = 3 - \frac{5}{3}\}; Q\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Calculamos el simétrico $A'(a, b, c)$ de $A(0, 2, 3)$ usando que Q es el punto medio del segmento AA' :

$$\left\{\frac{a+0}{2} = \frac{5}{3}, 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{3}, \frac{b+2}{2} = \frac{11}{3}, 3b + 6 = 22 \Rightarrow b = \frac{16}{3}, \frac{c+3}{2} = \frac{4}{3}, 3c + 9 = 8 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}\right\}$$

. El punto simétrico que se pide es $A'\left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

9.- (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80% corresponde al coche de tipo A, el 10% al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10% de A, el 20% de B y el 5% de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Resolución

Sean los sucesos A = la pieza es de tipo A B = la pieza es de tipo B C = la pieza es de tipo C
 D = la pieza es defectuosa

Según el enunciado, $p(A) = 80\% = 0,8$ $p(B) = 10\% = 0,1$ $p(C) = 10\% = 0,1$

$p(D/A) = 10\% = 0,1$ $p(D/B) = 20\% = 0,2$ $p(D/C) = 5\% = 0,05$

(i) Se pide $p(D)$. Por el teorema de probabilidad total,

$$p(D) = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) + p(C).p(D/C) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,05 = 0,105 = 10,5\%$$

$$(ii) \text{ Se pide } p\left(\frac{A}{D}\right) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A).p(D/A)}{p(D)} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,105} \cong 0,7619 = 76,19\%$$

10.- (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años

Resolución

$$X = \text{edad} \rightarrow N(26, 5) \Rightarrow Z = \frac{X-26}{5} \rightarrow N(0, 1).$$

(i) Se pide $p(X \geq 31) = p\left(\frac{X-26}{5} \geq \frac{31-26}{5}\right) = p(Z \geq 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 15,87\%$

(ii) Se pide $p(21 \leq X \leq 31) = p\left(\frac{21-26}{5} \leq \frac{X-26}{5} \leq \frac{31-26}{5}\right) = p(-1 \leq Z \leq 1) =$

$= p(Z \leq 1) - p(Z \leq -1) = p(Z \leq 1) - p(Z \geq 1) = p(Z \leq 1) - 1 + p(Z < 1) =$

$= 2p(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 68,26\%$