

* Banque filière PT *

Epreuve de Physique I-B

Durée 4 h

Indications générales : il est rappelé que le manque de soin peut être pénalisé. En particulier, les résultats seront encadrés. Les applications numériques donnent lieu aux mêmes bonifications que n'importe quelle question. Les résultats doivent impérativement être donnés avec leurs unités.

Dans ce problème, on étudie quelques éléments d'une chaîne de traitement du son. Dans la partie 1, on étudie quelques aspects d'un émetteur sonore à savoir un instrument de musique à cordes. Dans la partie 2, on s'intéresse au microphone qui convertit les ondes sonores en ondes électriques. Dans la partie 3, enfin, on étudie le filtrage du signal électrique produit par le microphone. Les trois parties sont complètement indépendantes.

1. Corde vibrante.

Aucune connaissance sur les cordes vibrantes n'est exigée pour cette partie.

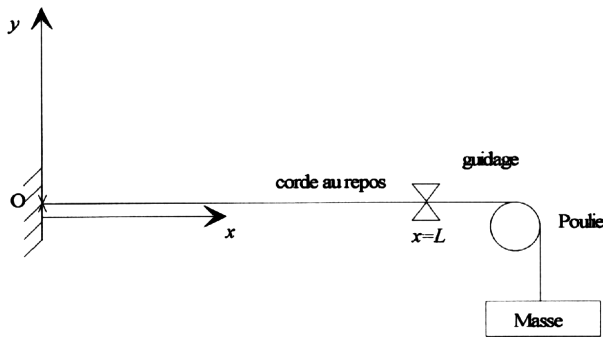


Fig. 1

On considère une corde homogène initialement au repos et confondue avec l'axe Ox , inélastique, de masse linéique μ , tendue par une tension pratiquement uniforme et constante T . Le dispositif global est représenté figure 1. La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L$.

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy , autour de la position d'équilibre.

L'élongation à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y(x,t)$.

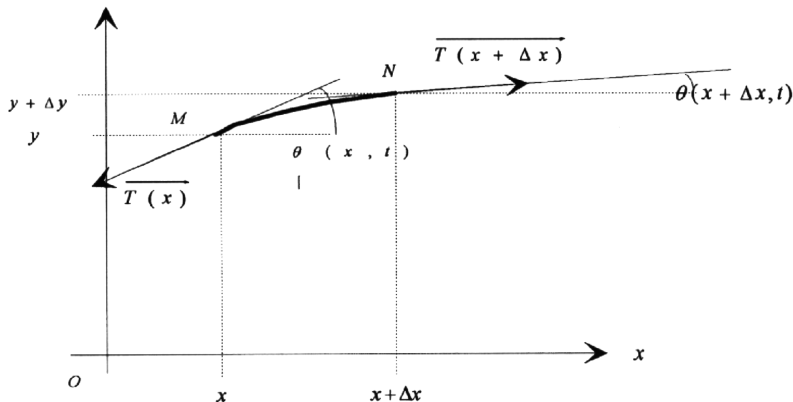


Fig. 2

La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $q(x,t)$. Les déplacements étant de faibles amplitudes, cet angle θ reste petit (cf figure 2).

Dans l'étude du mouvement de la corde, on négligera l'action du champ de pesanteur ainsi que toute cause d'amortissement.

La géométrie du problème est représentée figure 2 ; on y a représenté les tensions appliquées à l'élément de corde MN .

1.1. Equation d'onde d'élongation de la corde.

1.1. 1. Faire le bilan des forces extérieures appliquées à l'élément de corde MN d'abscisse comprise entre x et $x + \Delta x$.

1.1.2. Déterminer la masse de l'élément de corde MN au premier ordre en θ et son accélération en fonction d'une dérivée partielle seconde.

1.1.3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à cet élément de corde et en déduire l'équation obtenue par projection sur l'axe Oy. (on rappelle que θ est petit).

1.1.4. Exprimer $\tan\theta$ en fonction d'une dérivée partielle à déterminer. En déduire $\frac{\partial\theta}{\partial x}$

1.1.5. En déduire l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ Eq. (1)

Exprimer la constante v en fonction de T et μ et en donner la dimension. Que représente-t-elle ?

1.1.6. Application numérique

Calculer μ et v pour une corde d'acier de masse volumique $7,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, de rayon 1 mm et soumise à une tension $T = 3000 \text{ N}$.

1.2. Recherche des solutions en ondes stationnaires.

On rappelle que la corde est fixée de façon rigide en $x = 0$ et guidée en $x = L$.

On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme :

$$y(x, t) = f(x).g(t) \quad \text{Eq. (2)} \quad (\text{ondes stationnaires})$$

et on admet que les fonctions $f(x)$ et $g(t)$ sont sinusoïdales et on pose :

$$f(x) = a_1 \sin(kx + \phi_1)$$

$$g(t) = a_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

1.2.1. En introduisant l'équation (2) dans l'équation (1), déduire la relation qui lie k à ω .

1.2.2. Que peut-on dire de l'élongation aux points $x = 0$ et $x = L$ à chaque instant ? En déduire les valeurs $f(0)$ et $f(L)$.

1.2.3. Montrer que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes λ_n que l'on exprimera en fonction de L et n . Comment appelle-t-on λ ?

1.2.4. En déduire que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n , avec n entier positif. Exprimer ω_n en fonction de L , n et v .

1.2.5. A chaque valeur de ω_n correspond un mode propre. Le mode $n = 1$ est appelé mode fondamental. Les modes

correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques.

Exprimer l'élongation $y_n(x, t)$ du mode d'indice n et donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques.

1.2.6. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique.

Une guitare électrique comporte six cordes en acier.

Le tableau ci-dessous fournit pour chaque corde, la valeur de sa fréquence fondamentale et son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
f1 = Fréquence fondamentale(Hz)	82.5	110	147	196	247	330
Diamètre (mm)	1.12	0.89	0.70	0.55	0.35	0.25

Toutes les cordes ont une longueur $L = 0,63$ m et une masse volumique $\rho = 7800$ kg.m⁻³.

1.2.6.1. Déterminer T en fonction de ρ , π , d , L et $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ pour le mode fondamental.
Calculer numériquement les tensions nécessaires pour que la guitare soit accordée.

1.2.6.2. Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 1% en valeur relative ? Application numérique.

1.2.6.3. L'instrumentiste veut produire un son de fréquence fondamentale de 500Hz puis 1 kHz avec une tolérance de 1% sur la corde n°6. Avec quelle précision absolue doit-il placer son doigt pour raccourcir la corde? Comment varie la précision absolue avec la fréquence fondamentale du son à produire ? Application numérique. Commenter.

1.3. Aspect énergétique.

On se place toujours dans le cas des ondes stationnaires et on considère, sauf mention contraire, le mode propre n .

1.3.1. Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'élément de corde MN. En déduire l'énergie cinétique de la corde entre $x = 0$ et $x = L$ sous forme d'une intégrale.

1.3.2. En utilisant l'expression de l'élongation $y_n(x, t) = A_n \sin(k_n \cdot x) \sin(\omega_n \cdot t + \varphi)$ explicitée dans le paragraphe 1.2., déterminer l'énergie cinétique totale de la corde entre $x = 0$ et $x = L$ sous la forme :

$$E_C = C_1 \cdot A_n^2 \cdot \cos^2(\omega_n t + \varphi)$$

Exprimer C_1 en fonction de n , T et L .

1.3.3. Exprimer la longueur de l'élément de corde MN au deuxième ordre en θ et en fonction d'une dérivée partielle à déterminer. En déduire l'allongement de l'élément de corde.

1.3.4. En déduire l'allongement total de la corde entre $x = 0$ et $x = L$ noté ΔL sous forme intégrale.

1.3.5. Calculer l'allongement total de la corde entre $x = 0$ et $x = L$. En considérant la variation de hauteur de la masse qui tend la corde, déduire l'expression de l'énergie potentielle de la corde sous la forme :

$$E_p = C_2 \cdot A_n^2 \cdot \sin^2(\omega_n t + \varphi)$$

Exprimer C_2 en fonction de n , T et L .

$$E_n = K_n T A_n^2$$

1.3.6. Exprimer l'énergie mécanique totale de la corde sous la forme :

et donner K_n en fonction de n et L .

1.3.7. La solution générale de l'équation de propagation est une combinaison linéaire des divers modes de vibration. Donner, sans démonstration, l'expression de l'énergie mécanique totale de la corde dans le cas général.

2. Microphone électrostatique.

Le microphone électrostatique étudié dans cette partie est constitué par :

- une plaque plane métallique P_1 , indéformable, de masse m qui peut se déplacer en translation perpendiculairement au plan de sa surface, dans la direction notée $x'x$
- une plaque plane métallique P_2 , indéformable et fixe, dont le plan est parallèle à P_1 .

La surface en regard des deux plaques est notée S . L'ensemble P_1 et P_2 constitue ainsi un condensateur plan dont on négligera les effets de bord.

La plaque P_1 est rappelée à sa position d'équilibre par un ressort de raideur k qui exerce une force de rappel dans la direction $x'x$.

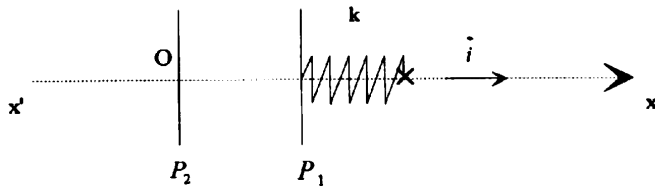


Fig. 3

L'origine des espaces est un point O appartenant à P_2 . L'axe Ox est horizontal. La géométrie de l'ensemble est représentée à la figure 3.

On prendra comme valeur numérique de la permittivité diélectrique de l'air :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ U.S.I.}$$

2.1. Etude statique du condensateur.

On relie, en parallèle à ce condensateur, une source de tension de force

électromotrice U_0 dont le pôle positif est relié à la plaque P_1 . A l'équilibre, P_1 est à la distance X_0 de P_2 et on note Q_0 la charge électrique portée par P_1 sous la tension U_0 .

2.1.1. Faire un dessin du condensateur relié à la source de tension en mettant en évidence les charges électriques sur les armatures du condensateur et la géométrie du champ électrique.

2.1.2. Rappeler le théorème de Gauss et l'appliquer au condensateur pour déterminer l'expression de la norme du champ en fonction de S et Q_0 . On admet que le champ électrique à l'extérieur du volume délimité par les plaques est nul.

2.1.3. Rappeler la relation générale champ-potential et l'appliquer dans le cas présent compte tenu des particularités géométriques.

2.1.4. En déduire l'expression de la capacité du condensateur C_0 , en fonction de S et X_0 .

2.1.5. Déterminer l'expression de la force électrostatique qui s'exerce sur la plaque P_1 en fonction de U_0 , S , X_0 et en fonction de Q_0 et S .

2.1.6. Application numérique :

Calculer f_0 et C_0 avec les valeurs numériques suivantes :

$$S = 15 \text{ cm}^2, X_0 = 3.10^{-2} \text{ mm}, U_0 = 400 \text{ V}.$$

Comparer la valeur de C_0 aux valeurs usuelles des capacités des condensateurs utilisés en laboratoire. Comment procède-t-on pour obtenir les valeurs usuelles avec la géométrie du condensateur plan décrit dans ce problème ?

2.1.7. On impose, à présent, à P_1 un petit déplacement et une petite variation de charge électrique tels que la distance $P_1 P_2$ devienne $X = X_0 + x$ avec $|x| \ll X_0$ et la charge portée par P_1 devienne $Q = Q_0 + q$ avec $|q| \ll Q_0$.

On demande de déterminer au premier ordre (en effectuant un développement limité) en $\frac{x}{X_0}$ et $\frac{q}{Q_0}$ les expressions de :

· la nouvelle valeur de la capacité C en fonction de C_0 et $\frac{x}{X_0}$;

· la nouvelle valeur de tension U en fonction de U_0 , $\frac{x}{X_0}$, $\frac{q}{Q_0}$;

· la nouvelle valeur de force électrostatique $\vec{f}$ exercée sur la plaque P_1 en fonction de $\vec{f}_0$ et $\frac{q}{Q_0}$.

2.2. Etude du circuit électrique.

Dans cette partie, on considère le circuit RLC série formé par la mise en série du condensateur C étudié précédemment, d'une résistance R et d'une inductance pure L . Le dipôle ainsi formé est alimenté par la source de tension de force électromotrice U_0 comme précédemment.

On superpose à cette force électromotrice U_0 une composante alternative e avec $|e| \ll U_0$.
On note i l'intensité du courant alternatif qui parcourt le circuit.

On rappelle que la plaque P_1 est soumise à la force de rappel du ressort qui a tendance à la ramener à la position d'équilibre $x = 0$ pour la tension U_0 .

En outre, P_1 est soumise à une force d'amortissement de norme $\vec{f}' = -r \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}$ et à une force d'origine extérieure de norme $f_c \cdot \vec{i}$.

On reste dans le domaine des petites variations de sorte que les approximations $|x| \ll X_0$ et $|q| \ll Q_0$ restent valables. Enfin, on néglige les effets de la pesanteur.

2.2.1. Appliquer la loi d'Ohm au circuit série et en déduire une première équation différentielle liant e , $\frac{x}{X_0}$, $\frac{q}{Q_0}$, U_0 , R , L , i et $\frac{di}{dt}$.

2.2.2. Ecrire la loi fondamentale de la dynamique appliquée à la plaque P_1 et en déduire une seconde équation

différentielle liant f_c , k , r , m , x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{q}{Q_0}$ et f_0 .

2.2.3. On suppose que les grandeurs e , i , $\frac{dx}{dt}$ et f_e sont fonctions sinusoïdales du temps à la pulsation ω . Déterminer deux relations liant les amplitudes complexes $\underline{e}$, $\underline{i}$, $\underline{v}$, et $\underline{f_e}$ et l'impédance électrique $\underline{Z}$ du circuit pour

$x = 0$. On pose $\underline{v} = \frac{dx}{dt}$.

On exprimera les relations sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{e} &= \underline{a} \cdot \underline{i} + \underline{b} \cdot \underline{v} \\ \underline{f_e} &= \underline{c} \cdot \underline{i} + \underline{d} \cdot \underline{v}\end{aligned}$$

et on donnera $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ en fonction de $\underline{Z}$, U_0 , X_0 , m , k , r , f_0 , Q_0 , ω .

2.3. Etude du système précédent en microphone.

Dans cette partie, la composante alternative e est nulle et la force extérieure appliquée sur la plaque P_1 résulte de la surpression d'une onde sonore, p étant la valeur de la surpression acoustique.

La tension prélevée aux bornes de R est l'image électrique de la surpression p . On se place toujours dans l'hypothèse de variations sinusoïdales pour les grandeurs i , v et f_e .

2.3.1. En éliminant v dans les équations obtenues au paragraphe précédent, établir l'équation électrique de fonctionnement qui lie $\underline{i}$ et $\underline{f_e}$.

On montrera qu'il s'ajoute à l'impédance électrique $\underline{Z}$ un terme $\underline{Z_m}(\omega)$ lié au mouvement qu'on mettra sous la forme :

$$\underline{f_e} = -(\underline{Z} + \underline{Z_m}) \cdot \underline{i} \cdot \underline{g}$$

et on donnera l'expression de $\underline{g}$ en fonction de U_0 , X_0 , m , k , r , ω .

2.3.2. Donner le schéma électrique équivalent à cette impédance $\underline{Z_m}(\omega)$ sous forme de circuit RLC parallèle.

Déterminer les expressions R_m , C_m et L_m des valeurs des composants de ce circuit équivalent en fonction de k , r , m , ω , U_0 et X_0 .

3. Traitement du signal électrique : filtrage

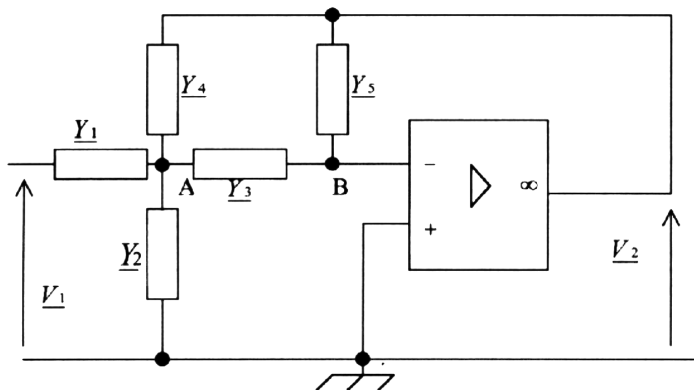


Fig. 4

Le signal issu du microphone (tension $\underline{V_1}$) est envoyé sur le circuit représenté en figure 4.

Les composants notés $\underline{Y_i}$ avec $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des admittances réalisées par des résistances ou des condensateurs. On rappelle que l'admittance d'un dipôle est l'inverse de son impédance.

3.1. Fonction de transfert générale.

Démontrer que la fonction de transfert peut être mise sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = - \frac{\underline{Y_1} \cdot \underline{Y_3}}{\underline{Y_3} \cdot \underline{Y_4} + \underline{Y_5} \cdot \underline{S}}$$

Déterminer S en fonction des admittances Y_i .

3.2. Etude du filtre passe-bas.

Les admittances Y_1 , Y_2 et Y_4 sont réalisées par des résistances toutes égales à R tandis que les admittances Y_3 et Y_5 sont réalisées par des condensateurs de capacités respectivement égales à C_2 et C_1 .

3.2.1. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $T(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ en fonction de R, C_1 et C_2 .

$$T(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

3.2.2. Mettre cette fonction de transfert sous la forme :

en déterminant les expressions de A, ω_0 et m en fonction de R, C_1 et C_2 .

3.2.3. Déterminer, à partir des équations précédentes, les expressions de C_1 et C_2 en fonction de R, m et ω_0 .

3.2.4. Pour réaliser le filtre, on utilise des capacités de précision 5%. Quelle est l'incertitude sur ω_0 , à supposer des valeurs exactes pour les résistances ?

3.2.5. Application numérique :

Calculer les valeurs numériques de C_1 et C_2 avec : $R = 1 \text{ k}\Omega$; $m = 0,707$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 20 \text{ kHz}$.

3.3. Expérimentation.

On dispose d'un générateur basses fréquences (GBF) de fréquence maximale 2MHz, d'un oscilloscope 2 voies et de tous les accessoires de mesure (sondes, ...).

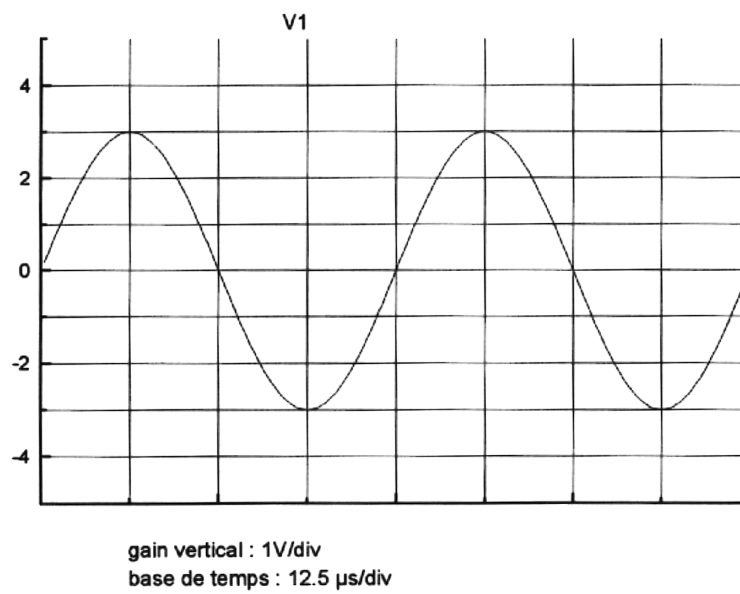
3.3.1. Etablir le câblage du filtre et des éléments précédents qui permet de tracer la fonction de transfert en amplitude et en phase du filtre passe-bas.

3.3.2. On souhaite relever le tracé de la fonction de transfert en amplitude et en phase du filtre passe-bas et, pour ce faire, on applique en entrée du filtre la tension sinusoïdale conformément à la figure 5.

Déterminer numériquement, à partir de ce chronogramme, la fréquence commune du signal d'entrée et de sortie. Calculer le module de la fonction de transfert et le déphasage entre les deux signaux V_1 et V_2 et représenter à l'échelle sur le chronogramme du document réponse, la tension de sortie du filtre.

3.3.3. Le laboratoire dans lequel nous travaillons dispose, en plus du GBF, d'un oscilloscope numérique pourvu d'un module FFT qui permet de visualiser à l'écran la décomposition spectrale d'un signal. Comment peut-on visualiser directement sur l'écran de l'oscilloscope la fonction de transfert en amplitude (en échelle linéaire de fréquence) du filtre précédent avec un signal alternatif carré de basse fréquence ? On se souviendra que l'analyse harmonique d'un

tel signal carré donne une décroissance des harmoniques en $\frac{1}{n}$ si bien que les harmoniques de rangs élevés peuvent être considérées d'amplitudes approximativement constantes.

*Fig. 5*