

Session de mai 1999

EPREUVE DE PHYSIQUE

Classes Préparatoires MP, PC, PSI, PT

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites.
Aucun document n'est autorisé.

Données numériques et notations:

g	accélération de la pesanteur ($= 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)
t	temps
z	position verticale
$\dot{z}, \ddot{z}$	dérivées première et seconde de z par rapport au temps
$\underline{g} = \underline{G} e^{i\omega t}$	représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale $g(t) = G \cos(\omega t - \psi)$
$\underline{G} = G e^{-i\psi}$	amplitude complexe de $g(t)$
$j^2 = -1$	j , nombre imaginaire

nombres utiles

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15 ; \sqrt{0,15} \approx 0,39 ; \sqrt{0,13} \approx 0,36 ; \sqrt{7,5} \approx 2,7 ; \lg 2 \approx 0,3 ; \lg 4 \approx 0,6 ; \lg 2,7 \approx 0,44$$

Les candidat(e)s veilleront à exposer leurs raisonnements avec clarté et précision, rédiger avec soin dans un français correct, et reporter les numéros des paragraphes et sous-paragraphes dans la marge pour chaque question.

Il est demandé de justifier clairement les relations utilisées.

Tous les résultats littéraux ou numériques devront être encadrés.

L'usage de la calculatrice étant interdit, il sera tenu compte des connaissances de cours des candidat(e)s dans leurs exposés. Les applications numériques demandées peuvent être rapidement calculées à la main à l'aide des nombres utiles ci-dessus; la précision demandée est de deux chiffres significatifs. Les valeurs numériques des grandeurs calculées ne sont pas prises en compte si elles ne sont pas accompagnées des unités physiques correctes.

Les passages rédigés au crayon de papier ne sont pas pris en compte.

On se propose d'étudier quelques problèmes relatifs à la **suspension d'un véhicule automobile** et au comportement dynamique de ce véhicule sur route déformée, ainsi qu'un modèle électrique équivalent.

COMPORTEMENT ROUTIER D'UNE AUTOMOBILE

I. Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun:

- d'un ressort métallique hélicoïdal de *constante de raideur* k_1 et de longueur à vide L_{01} à l'avant (respectivement k_2 et L_{02} à l'arrière)
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de *coefficient d'amortissement* a_1 à l'avant (a_2 à l'arrière).

Le barycentre G du châssis de masse M et de moment d'inertie J autour de l'axe horizontal de tangage Gy est distant de D_1 des suspensions avant (resp. D_2 des suspensions arrière). Dans la première partie, les pneus de rayon extérieur R seront considérés comme totalement rigides. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut ($\vec{u}_z$, vecteur unitaire vertical).

Le châssis est fixé aux suspensions avant et arrière aux points G_1 et G_2 respectivement.

Les angles que font les segments GG_1 et GG_2 avec la direction horizontale Gx sont très petits.

I.1. Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal, quelles sont les longueurs L_{e1} et L_{e2} des ressorts au repos en fonction de M , D_1 , D_2 et des longueurs à vide L_{01} et L_{02} ?

I.2. Lors d'un *essai dynamique à vide*, le châssis est abaissé d'une hauteur h à partir de sa garde au sol z_0 , puis brusquement libéré sans vitesse initiale. Les positions verticales de G , G_1 et G_2 par rapport à leurs positions de repos sont respectivement $z(t)$, $z_1(t)$ et $z_2(t)$. L'angle de rotation $\theta(t)$ de tangage du châssis par rapport à la position de repos autour de Gy est considéré comme très petit.

I.2.1. En déduire les expressions linéarisées très simples de z_1 et z_2 en fonction de z et θ .

I.2.2. Etablir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis et celle de l'angle de tangage $\theta(t)$ en fonction de z_1 , z_2 , $\ddot{z}_1$ et $\ddot{z}_2$.

I.2.3. En déduire les équations différentielles couplées entre z , θ et leurs dérivées $\dot{z}$, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

I.2.4. En déduire les deux conditions reliant k_1 et k_2 d'une part, a_1 et a_2 d'autre part en fonction de D_1 et D_2 qui permettent de *découpler le mouvement de tangage et les oscillations verticales* du châssis.

I.2.5. Ecrire alors les équations différentielles de z , θ sous la forme

$$A\ddot{z} + B\dot{z} + Cz = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \beta\theta = 0$$

A , B , α et β étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a_1 , k_1 , D_1 , D_2 , M et J .

I.2.6. On usine les amortisseurs de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible*. Quelle doit être la valeur de B ? En déduire celle de a_1 en fonction de M , k_1 , D_1 et D_2 .

I.2.7. Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de h et $\omega_0 = \sqrt{B}$?

I.2.8. Tracer avec soin le graphe $z(t)$ (on prendra pour échelles sans unités $h = 1$ et $\omega_0 = 1$).

I.2.9. Quelle doit alors être l'expression de J en fonction de M , D_1 et D_2 pour que le tangage soit aussi amorti le plus rapidement possible si on l'impulse?

I.3. On effectue de nouveau le même *essai en charge nominale*, le véhicule contenant quatre masses égales chacune à m , deux à l'avant à la distance horizontale D_1 de Gy, et deux à l'arrière à D_2 de Gy, de manière à maintenir le découplage de z et θ .

I.3.1. Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par l'écart $z'(t)$ à la nouvelle position d'équilibre, et l'écrire sous la forme

$$\mathbb{M} + A' \mathbb{D} + B' z' = 0$$

en exprimant les nouvelles constantes A' et B' en fonction de a_1, k_1, D_1, D_2, M et m .

I.3.2. Montrer que dans ces conditions, le véhicule oscille verticalement.

I.3.3. Déterminer l'expression de la période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de A' et B' , puis de k_1, D_1, D_2, M et m .

I.3.4. On donne $D_1 = 1\text{m}$ et $D_2 = 1,5\text{m}$. On souhaite obtenir $T = \pi/3$ pour $M = 1000\text{kg}$ et $m = 100\text{kg}$. En déduire la valeur de k_1 puis celle de a_1 .

II. ETUDE DE LA REPONSE HARMONIQUE

II.1. On étudie maintenant le *comportement sur route difficile* du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun. Pour simplifier le problème, on suppose les quatre systèmes {ressort - amortisseur} identiques et indépendants, de constantes $\{k, a\}$, portant chacun le quart de la masse totale. L'ensemble {roue, essieu, pneu} a une masse m' et le pneu est assimilé à un système élastique linéaire amorti de constantes $\{k', a'\}$.

II.1.1. On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la cote de référence horizontale 0 suivant la relation

$$e = e_m \cos(\gamma x) .$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses, exprimée en

fonction de γ ? Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?

II.1.2. On repère maintenant le châssis et l'essieu par leurs positions $s(t)$ et $s'(t)$ par rapport à la cote de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu-route par rapport à la verticale.

Montrer que les équations différentielles vérifiées par $s(t)$ et $s'(t)$ sont de la forme

$$\mathbb{M} + C' \mathbb{D}' + D' s' = f'(e, \mathbb{D}) + \text{constante} \quad \text{et} \quad \mathbb{M} + C \mathbb{D} + D s = f(s', \mathbb{D}') + \text{constante}$$

où f et f' sont des fonctions respectivement de $(s', \mathbb{D}')$ et $(e, \mathbb{D})$.

C, D, C' et D' sont des constantes que l'on exprimera en fonction de k, a, M, m, k', a' et m' .

II.2. On étudie le *régime forcé permanent*.

II.2.1. Expliquer la signification de cette expression.

II.2.2. En utilisant les notations complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m, ω, C, D, C' et D' . L'écrire sous la forme

$$\underline{S} = e_m \left(\frac{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \right) \left(\frac{1 + j \frac{\omega}{Q'\omega'_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_0} + j \frac{\omega}{Q'\omega'_0}} \right)$$

où ω_0 et Q sont des constantes que l'on exprimera en fonction de C et D , puis de a, k, M et m ;

ω'_0 et Q' sont des constantes que l'on exprimera en fonction de C' et D' , puis de a', k' et m' .

II.2.3. On suppose k' infini (pneus rigides). En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de la

pulsation réduite $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et de Q . Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

II.2.4. Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera en fonction

de Q , et démontrer que $\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1-\Omega_m^4}}$.

II.2.5. Calculer Q , Ω_m , S_m/e_m si $k = 35000 \text{ Nm}^{-1}$ et $a = 7000 \text{ kg.s}^{-1}$.

II.2.6. Tracer avec soin le diagramme de Bode (ou son allure si la question précédente n'a pas été faite) donnant $\lg(S/e_m)$ en fonction de $\lg \Omega$ dans la plage $0,1 \leq \Omega \leq 100$.

II.2.7. Calculer la pulsation propre ω_0 . En déduire la distance λ_m entre ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90km/h. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse?

II.2.8. On suppose maintenant k' fini et a' non nul, de sorte que $Q' = 2,5$ et $\omega'_0 = 10 \omega_0$. Par analogie avec la courbe obtenue précédemment au II.2.6., prévoir l'allure du diagramme $\lg(S/e_m)$ en fonction de $\lg \Omega$ donnant la réponse harmonique du châssis modifiée par la réaction des pneus, et la tracer approximativement sur le même graphe.

II.2.9. A partir de quelles valeurs approximatives de Ω et de λ les pneus jouent-ils un rôle de filtrage des irrégularités de la route?

ANALOGIE ELECTRIQUE

III.1. Le comportement du véhicule peut être simulé par un circuit électrique. On se propose ici d'étudier celui qui représente au mieux la réponse harmonique du véhicule sur route dégradée du paragraphe II.

III.1.1. Le circuit électrique suivant est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω .

Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit.

III.1.2. Quelles grandeurs d'entrée $\underline{G}_e$ et de sortie $\underline{G}_s$ doivent être choisies pour obtenir une *fonction de transfert harmonique* équivalente à celle de la suspension automobile $\{m+M/4, k, a\}$ sur une route déformée sinusoïdalement (pneus infiniment rigides), c'est à dire telles que

$$\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}},$$

où $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite; ω_0 une pulsation propre et Q un rapport caractéristique dont on trouvera les expressions en fonction de R, L et C .

III.1.3. Par des arguments physiques clairs énoncés à partir de la comparaison des fonctions de transfert, établir une *équivalence entre paramètres électriques* R , L , C et *paramètres mécaniques* $m+M/4$, k , a de la suspension. A quelles grandeurs mécaniques correspondent les tensions U_e et U_s ?

III.2. A partir de l'équivalence électrique précédente, déterminer le schéma électrique équivalent de la suspension complète incluant l'élasticité des pneus, dont la réponse harmonique est donnée au II.2.2., en précisant les équivalents mécaniques des dipôles électriques R' , L' et C' ajoutés.