

Лекція 7

Режим стоячих хвиль у лінії короткозамкнутої на кінці

Якщо $Z_2 = 0$, то з формули коефіцієнта відбиття напруги $p_u = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1 = -p_i \rightarrow p_i = 1$. Тобто між напругою падаючої та відбитої хвиль у точці відбиття є зсув по фазі 180° , а фаза струмів – однакова! З цього випливає, що напруга на кінці лінії дорівнює нулю, а струм на кінці лінії – максимальний.

Скористаємося знову рівняннями $\dot{U}$ та $\dot{I}$. У довгій лінії без втрат, які раніше записали у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta \xi + j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta \xi \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta \xi + j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta \xi \end{cases} \quad (1)$$

Врахуємо в (1), що $U_2 = 0$ при $\xi = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta \xi \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta \xi \end{cases} \quad (2)$$

Миттєві значення струму та напруги при $\varphi = 0$:

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re}[\dot{U} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta \xi e^{j\omega t}] = \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta \xi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ i = \operatorname{Re}[\dot{I} e^{j\omega t}] = \dot{I}_2 \cos \beta \xi \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Амплітуди U і I у довільній точці ξ довгої лінії визначається виразами:

$$\begin{cases} U = \dot{I}_2 Z_0 |\sin \beta \xi| \\ I = \dot{I}_2 |\cos \beta \xi| \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо криві зміни напруги та струму:

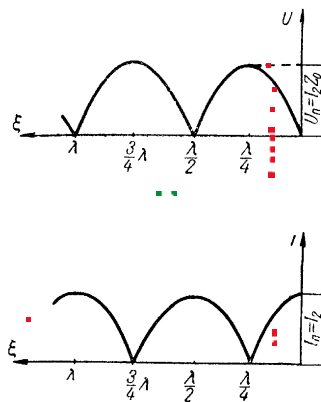


Рисунок 1

Вузли напруги та пучності струму розташовані в точках $\xi_m = m \frac{\lambda}{2}$,
 $m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda$; пучності напруги та вузли струму - у точках $\xi_n = (2n-1) \frac{\lambda}{4}$,
 $n = 1, 2, \dots \rightarrow \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda$.

Знайдемо вхідний опір короткозамкнутої лінії як відношення комплексних амплітуд $\dot{U}$ і $\dot{I}$ при $\xi = l$ з (2):

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta l = jx_{\text{вх}}, \quad (5)$$

де $x_{\text{вх}} = Z_0 \operatorname{tg} \beta l$.

$\Rightarrow$ Вхідний опір лінії чисто реактивний! Залежність $x_{\text{вх}}$ від довжини лінії l або βl визначається видом функції $\operatorname{tg} \beta l$ (рис.2).

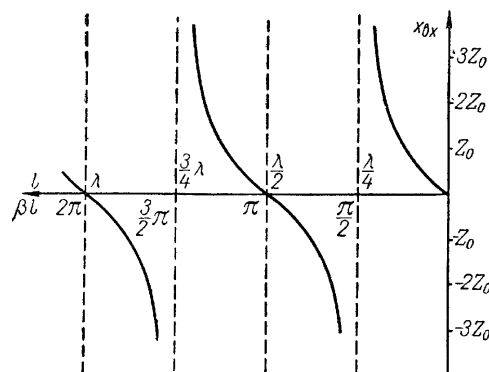


Рисунок 2

Очевидно, що на проміжку $0 \leq \beta l < \frac{\pi}{2}$ складова $x_{\text{вх}}$ має індуктивний характер, при $\frac{\pi}{2} < \beta l \leq \pi$ – ємнісний і так далі вздовж лінії.

Якщо $l \ll \lambda \Rightarrow$ ДЛ веде себе подібно до невеликого витку з відповідною індуктивністю. Для короткої лінії:

$$x_{\text{вх}} = Z_0 \operatorname{tg} \beta l \approx Z_0 \beta l = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{2\pi l}{\lambda} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \omega l \sqrt{L_1 C_1} = \omega L_1 l$$

З цього випливає, що будь-яка котушка індуктивності матиме властивості елемента із зосередженою індуктивністю, якщо лінійні розміри її набагато менші за довжину хвилі.

В області вузлів або пучностей струмів, частотні властивості лінії подібні до властивостей послідовного або паралельного коливального контурів ($x_{\text{реакт}} = 0$). При

$$\beta l = m \frac{\pi}{2}, \quad m \neq 0 \quad Z_{\text{вх}} = 0, \quad \text{а при} \quad \beta l = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad Z_{\text{вх}} \rightarrow \infty.$$

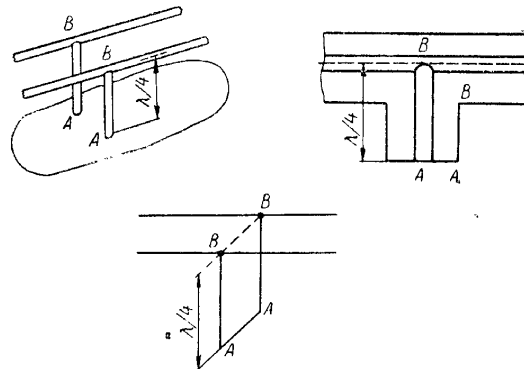
$$\frac{\lambda}{4}$$


Рисунок 3

Але насправді такі провідники, що утворюють “металевий ізолятор”, мають кінцеву, але досить малу провідність. Тому вхідний опір опори в точці В-В матиме великі значення, і шунтуючим впливом “витоків ізолятора” можна знехтувати.

$$Z_{6x}$$

$$Y_{ex} = \frac{1}{Z_{ex}} = -jY_0 \cot \beta l = -jb_{ex}$$

де Y_0 – хвильова провідність лінії.

Режим стоячих хвиль у лінії, замкнутої на реактивний опір

$$Z_2 = jx_2$$

$$\dot{p}_u = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_0 + Z_2} = \frac{-Z_0 + jx_2}{Z_0 + jx_2} = -\dot{p}_i \quad (6)$$

$$p_u = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_0 + Z_2} = \frac{jx_2 - Z_0}{jx_2 + Z_0} = \left| \begin{array}{l} \text{помножити чисельник} \\ \text{і знам. на } jx_2 - Z_0 \end{array} \right| = \frac{(jx_2 - Z_0)^2}{-x_2^2 - Z_0^2} = \frac{Z_0^2 - x_2^2 - 2jx_2Z_0}{-(x_2^2 + Z_0^2)} = \frac{x_2^2 - Z_0^2}{x_2^2 + Z_0^2} + j \frac{2jx_2Z_0}{x_2^2 + Z_0^2}$$

Оскільки $|p_u| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \Rightarrow$

$$|p_u| = \sqrt{\left(\frac{x_2^2 - Z_0^2}{x_2^2 + Z_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 + Z_0^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_2^4 + Z_0^4 - 2x_2^2 Z_0^2 + 4x_2^2 Z_0^2}{(x_2^2 + Z_0^2)^2}} = \sqrt{\frac{x_2^4 + 2x_2^2 Z_0^2 + Z_0^4}{(x_2^2 + Z_0^2)^2}} = \sqrt{\frac{x_2^4 + 2x_2^2 Z_0^2 + Z_0^4}{x_2^4 + 2x_2^2 Z_0^2 + Z_0^4}} = 1$$

$$\Rightarrow |p_u| = 1 \Rightarrow \text{режим стоячих хвиль.}$$

Якщо згадати тригонометрію, то можна позначити:

$$\sin \varphi_u = \frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 + Z_0^2} \quad \cos \varphi_u = \frac{x_2^2 - Z_0^2}{x_2^2 + Z_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{\sin \varphi_u}{\cos \varphi_u} = \frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 - Z_0^2} \Rightarrow \varphi_u = \operatorname{arctg} \frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 - Z_0^2}$$

Тоді $\dot{p}_u$ можна переписати в наступному вигляді

$$\dot{p}_u = \cos \varphi_u + j \sin \varphi_u = e^{j\varphi_u} = e^{j \operatorname{arctg} \frac{2x_2 Z_0}{x_2^2 - Z_0^2}}$$

Набагато простіше, якщо врахувати, що

$$\dot{p}_u = \operatorname{Re} + j \operatorname{Im} = |\dot{p}_u| e^{j\varphi_u},$$

$$|\dot{p}_u| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2},$$

$$\varphi_u = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}},$$

Тобто модуль коефіцієнта відбиття дорівнює 1, тобто маємо режим стоячих хвиль. Напряга зворотної хвилі в точці відбиття зсунуте за фазою відносно напруги падаючої

хвилі на кут φ_u , величина якого залежить при кінцевому x_2 між 0 та π . Тобто на кінці лінії тепер немає ані вузла, ні пучності напруги. Аналогічна ситуація з струмом, так як

$$p_i = -p_u$$

Тепер знайдемо комплексні значення $\dot{U}$ та $\dot{I}$ у довільній точці лінії для випадку

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = jx_2 \rightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{U}_2}{jx_2} \rightarrow \dot{U}_2 = \dot{I}_2 \dot{Z}_2 = jx_2 \dot{I}_2$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta \xi + j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta \xi = \dot{U}_2 \cos \beta \xi + j \frac{\dot{U}_2}{jx_2} Z_0 \sin \beta \xi = \dot{U}_2 \cos \beta \xi + \frac{\dot{U}_2}{x_2} Z_0 \sin \beta \xi \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta \xi + j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta \xi = \dot{I}_2 \cos \beta \xi + j \frac{jx_2 \dot{I}_2}{Z_0} \sin \beta \xi = \dot{I}_2 \cos \beta \xi - \dot{I}_2 \frac{x_2}{Z_0} \sin \beta \xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \left(\cos \beta \xi + \frac{Z_0}{x_2} \sin \beta \xi \right) \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \left(\cos \beta \xi - \frac{x_2}{Z_0} \sin \beta \xi \right) \end{cases}$$

(7)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{x_2} \dot{U}_2 (Z_2 \cos \beta \xi + Z_0 \sin \beta \xi) \\ \dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \dot{I}_2 (Z_2 \sin \beta \xi + Z_0 \cos \beta \xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{x_2} \dot{U}_2 \sqrt{x_2^2 + Z_0^2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} \cos \beta \xi + \frac{Z_0}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} \sin \beta \xi \right) \\ \dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \dot{I}_2 \sqrt{x_2^2 + Z_0^2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} \sin \beta \xi - \frac{Z_0}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} \cos \beta \xi \right) \end{cases}$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{Z_0}{\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}\right)^2} + \frac{Z_0^2}{\left(\sqrt{x_2^2 + Z_0^2}\right)^2} = \frac{x_2^2 + Z_0^2}{x_2^2 + Z_0^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z_0}{x_2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_0}{x_2}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \sqrt{1 + \frac{Z_0^2}{x_2^2}} (\cos \varphi \cos \beta \xi + \sin \varphi \sin \beta \xi) \\ \dot{I} = -\dot{I}_2 \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{Z_0^2}} (\sin \beta \xi \cos \varphi - \cos \beta \xi \sin \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \sqrt{1 + \frac{Z_0^2}{x_2^2}} \cos(\beta \xi - \varphi) \\ \dot{I} = -\dot{I}_2 \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{Z_0^2}} \sin(\beta \xi - \varphi) \end{cases}$$

(8)

де $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z_0}{x_2}$

Тоді амплітуди i та u у різних точках лінії:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \sqrt{1 + \left(\frac{Z_0}{x_2}\right)^2} |\cos(\beta \xi - \varphi)| \\ \dot{I} = -\dot{I}_2 \sqrt{1 + \left(\frac{x_2}{Z_0}\right)^2} |\sin(\beta \xi - \varphi)| \end{cases}$$

(9)

Тобто, вузли напруги будуть спостерігатися в точках, де $|\cos(\beta \xi - \varphi)| = 0$, тобто де $\beta \xi_m = (2m+1)\frac{\pi}{2} + \varphi$, $\xi_m = (2m+1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{2\pi} \lambda; m = 0, 1, 2, \dots$. Положення вузлів струму можна визначити з умови $|\sin(\beta \xi - \varphi)| = 0$, звідки $\xi_n = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{2\pi} \lambda; n = 1, 2, 3, \dots$

Нехай лінія замкнута на індуктивний опір $(x_2 > 0) \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ вузли напруги розташовуватимуться зліва від точок $\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \dots (2m+1)\frac{\lambda}{4} \dots$ тобто при $\frac{\lambda}{4} + \frac{\varphi\lambda}{2\pi}$ и т.і. (рис. 4)

Якщо в кінці лінії ввімкнута ємність, кут φ буде негативним, причому $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$. Тепер вузли напруги зміщуються відносно точок $\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \dots$ направо, до навантаження (рис. 5)

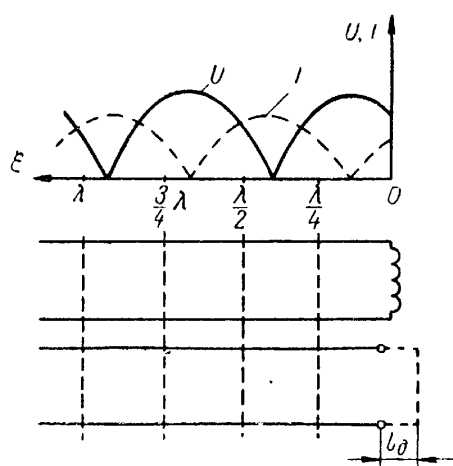


Рисунок 4

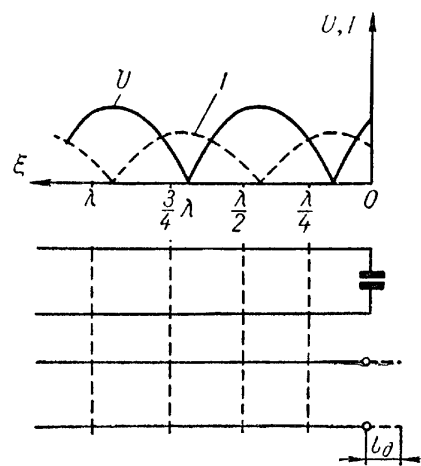


Рисунок 5