

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	2-9/01/2026
Sınıf	11	Süre	10 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR		
Konu	İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri		

BÖLÜM II

Kazanım	11.3.2.1. İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlar.
Değerler	VATANSEVERLİK - Dayanışma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

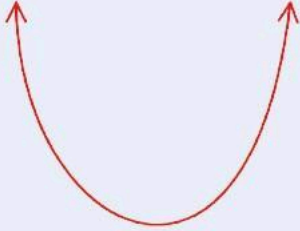
BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

İKİNCİ DERECEDEN BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyona **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

$f = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \text{ ve } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan (x, y) ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu grafiğe **parabol** denir.



$a > 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi yukarı doğrudur.



$a < 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi aşağı doğrudur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 4x + 16$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



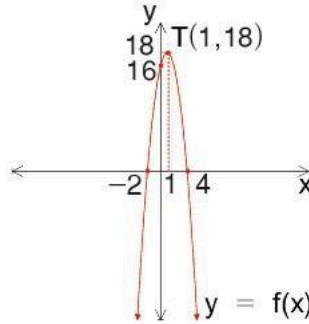
Çözüm

- $a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
- $x = 0$ için $f(0) = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 16 = 16$ olduğundan grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, 16)$ olur.
- $y = 0$ için $f(x) = -2x^2 + 4x + 16 = (-2x - 4) \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 4$ olup f 'nin grafiğinin x eksenini kestiği noktalar $(-2, 0)$ ve $(4, 0)$ olur.

x 'in bazı değerlerine göre y 'nin aldığı değerler tablosu aşağıdaki gibidir.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	0	10	16	18	16	10	...

Tabloda $x = 1$ değişkenine eşit uzaklıkta bulunan değişkenlerin aynı değeri verdiği görülür. Oluşturulan değer tablosundaki noktalar analitik düzlemde birleştirilerek parabol çizilir.



- Parabol $(-\infty, 1]$ için artan, $[1, \infty)$ için azalandır. Artanlıktan azalanlığa geçtiği nokta ise $T(1, 18)$ noktasıdır. T noktasının apsisinin parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisi olan -2 ve 4 sayılarının aritmetik ortalaması olduğuna dikkat ediniz. Tablodan da anlaşılabileceği gibi $x = 1$ doğrusuna eşit uzaklıktaki apsilerin görüntüleri aynı değeri verdiğinden grafik $x = 1$ doğrusuna göre simetriktir.
- Fonksiyonun alabileceği en büyük değer T noktasının ordinatı olan 18'dir.

- $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. Bir parabolün artanlıktan azalanlığa ya da azalanlıktan artanlığa geçtiği noktasına **tepe noktası** denir. Tepe noktası $T(r, k)$ olduğuna göre, $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = f(r) = f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ ise grafiğin şekline göre **en büyük** ya da **en küçük** değeri k 'dir.
- Grafiğin tepe noktasından geçen $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna parabolün **simetri eksen**i denir.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + 4x + 1$ fonksiyonunun grafiği x eksenine teğet olduğuna göre a değerini bulunuz.



Çözüm

Parabol x eksenine teğet ise $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan $\Delta = 0 \Rightarrow (4)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 0 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$ olur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \neq 0$ olmak üzere $f(x) = tx^2 + (t-2)x + 3$ fonksiyonunun grafiğine ait tepe noktası y ekseninde olduğuna göre grafiğin tepe noktasını ve t değerini bulunuz.



Çözüm

Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ y ekseninde olduğundan $r = 0$ olur. Bu durumda grafiğin y eksenini kestiği nokta aynı zamanda tepe noktasıdır. Buradan $f(x) = tx^2 + (t-2)x + 3$ 'ün y eksenini kestiği nokta olan tepe noktası $T(r, k) = T(0, 3)$ olur. Buradan $a = t$, $b = t-2$ ve $c = 3$ değerleri için $r = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow -\frac{(t-2)}{2 \cdot t} = 0 \Rightarrow t = 2$ olur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-4)^2 - 8$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



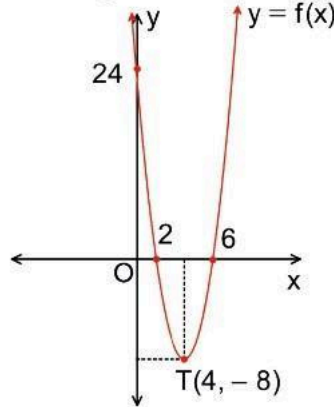
Çözüm

Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise $f(x) = a \cdot (x-r)^2 + k \Rightarrow 2 \cdot (x-4)^2 - 8 = a \cdot (x-r)^2 + k$ olup $a = 2$, $r = 4$ ve $k = -8$ bulunur. Buradan $T(4, -8)$ ve $a = 2 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarı doğrudur.

x eksenini kesen noktaların apsisi $y = 0$ için

$$0 = 2(x-4)^2 - 8 \Rightarrow 2(x-4)^2 = 8 \Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow (x-4)^2 = 2^2 \Rightarrow |x-4| = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ veya } x = 6 \text{ olur.}$$

y eksenini kesen noktanın ordinatı $x = 0$ için $y = 2 \cdot (0-4)^2 - 8 = 32 - 8 = 24$ olur. Grafik y eksenini $(0, 24)$ noktasında keser. Bulunan değerler analitik düzlemde aşağıda verilen şekildeki gibi gösterilir.



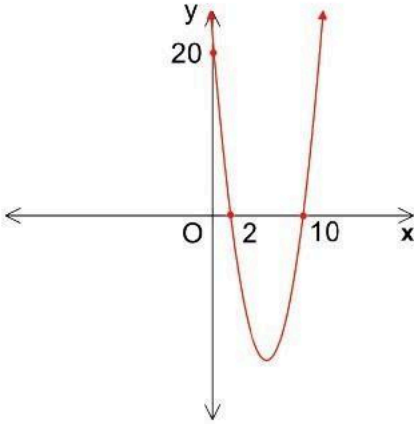
Grafiği Üzerindeki Bazı Noktaları Verilen İkinci Dereceden Fonksiyonu Oluşturma

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisi x_1, x_2 ve y eksenini kestiği nokta $(0, c)$ olan fonksiyon $f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$ olur. Buradan $f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$ fonksiyonunda $(0, c)$ noktası yerine yazılarak a değeri bulunur.

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$, parabolün geçtiği diğer bir nokta $B(x_1, y_1)$ olmak üzere $f(x) = a \cdot (x-r)^2 + k$ fonksiyonunda $B(x_1, y_1)$ noktası yerine yazılarak a değeri bulunur.



Örnek



Yandaki şekilde eksenleri kestiği noktaları verilen parabole ait fonksiyonu bulunuz.



Çözüm

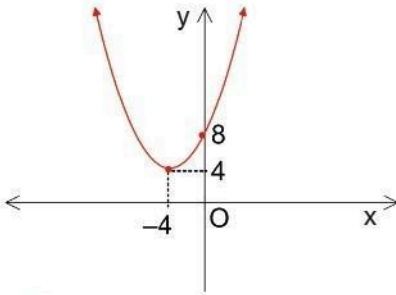
x eksenini kestiği noktaların apsisi $x_1 = 2$ ve $x_2 = 10$ olduğundan $y = a \cdot (x - 2) \cdot (x - 10)$ fonksiyonu elde edilir. y eksenini kestiği nokta olan $(0, 20)$ kullanılarak

$$y = a \cdot (x - 2) \cdot (x - 10) \Rightarrow 20 = a \cdot (0 - 2) \cdot (0 - 10) \Rightarrow 20 = a \cdot (-2) \cdot (-10) \Rightarrow a = 1 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak verilen parabole ait fonksiyon $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 2) \cdot (x - 10) = x^2 - 12x + 20$ olur.



Örnek



Yandaki şekilde verilen parabolün tepe noktası $T(-4, 4)$ ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı 8'dir. Buna göre verilen parabole ait fonksiyonu bulunuz.



Çözüm

Tepe noktası $T(-4, 4)$ ise $r = -4$ ve $k = 4$ olup bu değerler $y = a \cdot (x - r)^2 + k$ denkleminde yerine yazılırsa $y = a \cdot (x - (-4))^2 + 4 = a \cdot (x + 4)^2 + 4$ bulunur.

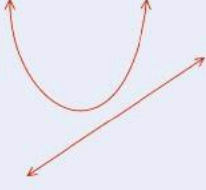
Parabolün y eksenini kestiği $(0, 8)$ noktası $y = a \cdot (x + 4)^2 + 4$ denklemini sağlayacağından

$$8 = a \cdot (0 + 4)^2 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \text{ olur. Bu durumda verilen parabole ait fonksiyon } y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 + 4 \text{ olur.}$$

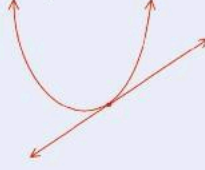
Doğru ile Parabolün Durumları

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun. (x, y) parabol ile doğrunun ortak bir noktasıysa her iki denklemi de sağlamalıdır. Her iki denklemi sağlayan x değerini bulmak için denklemler $ax^2 + bx + c = mx + n$ biçiminde eşitlenir. Elde edilen $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ ikinci derece denklemin diskriminantı Δ olsun.

1) $\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmez.



2) $\Delta = 0$ ise parabol ile doğru yalnız bir noktada kesişir.



3) $\Delta > 0$ ise parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.



$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ denkleminin gerçek kökleri varsa parabol ile doğrunun kesiştiği noktalardır.



Örnek

$y = mx - 1$ doğrusu $y = x^2 - 2x$ parabolüne teğet olduğuna göre m 'nin alabileceği değerleri bulunuz.



Çözüm

$y = mx - 1$ doğrusu $y = x^2 - 2x$ parabolüne teğet olduğundan
 $x^2 - 2x = mx - 1 \Rightarrow x^2 - (2 + m)x + 1 = 0$ denklemi için $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan
 $\Delta = (-(2 + m))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (2 + m)^2 = 4 \Rightarrow m + 2 = 2$ veya $m + 2 = -2$
 $m = 0$ veya $m = -4$ olur.

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -9x + 4$ doğrusunun kesişme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + a$ doğrusu birbirine teğet olduğuna göre a gerçekte sayısının değerini bulunuz.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 1$ doğrusunun kesişmesi için a 'nın alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x - m + 6$ fonksiyonunun en küçük değeri 6 olduğuna göre m gerçekte sayısının değerini bulunuz.

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 12x - b + 7$ parabolü x eksenine teğet olduğuna göre b gerçekte sayısının değerini bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $f(x) = ax^2 - (3k - 6)x + 12$ parabolünün tepe noktası y ekseninde olduğuna göre k gerçekte sayısının değerini bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....
.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2026
UYGUNDUR
Okul Müdürü
.....