

concours e4a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS- ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de Physique 1

durée 4 heures

Ce sujet ne nécessite l'utilisation d'aucun document ou matériel particulier. L'usage d'une simple calculatrice de poche est autorisé conformément à la législation en vigueur.

Tout ouvrage de référence et tout document sont interdits.

Les parties I et II de ce problème peuvent être résolues de manière indépendante.

On trouvera en annexe des rappels de résultats qui pourront être utiles à la résolution de ce problème.

Étude d'une ligne coaxiale

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs: un cylindre plein (l'âme) de rayon R_1 d'axe Oz et un cylindre coaxial (la gaine) de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3 . Le conducteur central sert à amener un courant électrique et le conducteur extérieur en assure le retour. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène, linéaire et isotrope, de permittivité $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_0 est la permittivité du vide, ϵ_r la permittivité relative du diélectrique et de perméabilité μ_0 (celle du vide).

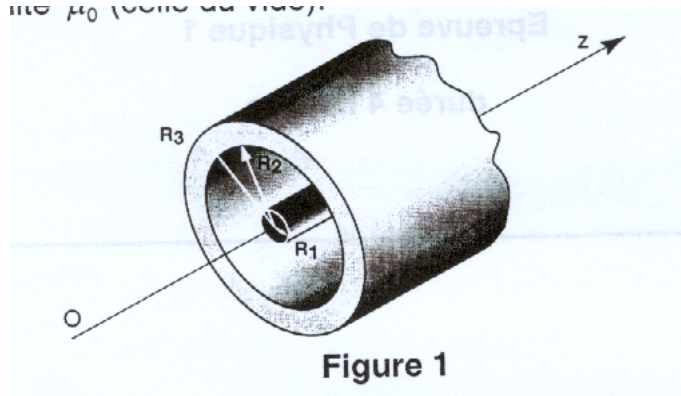


Figure 1

I. PARTIE 1

ÉTUDE ÉLECTRODYNAMIQUE DE LA LIGNE COAXIALE

I.A Absence de pertes.

En l'absence de pertes dans le câble, on peut, du point de vue électrique dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) modéliser un élément de câble de longueur dz de la manière suivante (fig. 2):

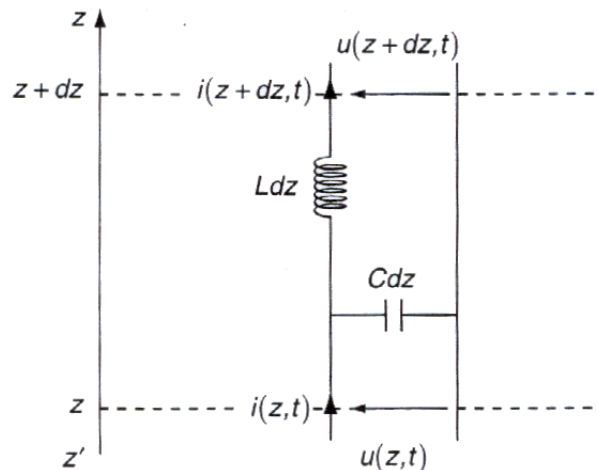


Figure 2

L'élément de câble de longueur dz possède une capacité pure Cdz (C est la capacité linéique du condensateur formé par l'âme et la gaine) et une inductance pure Ldz (L est l'inductance linéique du câble). À la date t , au point d'abscisse z , $i(z, t)$ est le courant circulant dans l'âme du câble et $u(z, t)$ la différence de potentiel entre l'âme et la gaine (le potentiel de la gaine est pris comme potentiel de référence).

I.A. 1 Équations de propagation pour l'intensité et la tension.

I.A.1.a En appliquant les lois élémentaires de l'électrocinétique aux bornes du condensateur de capacité Cdz , établir à l'ordre le plus bas une relation entre C , $u(z, t)$, $i(z, t)$ et (ou) leurs dérivées premières.

I.A.1.b En appliquant les lois élémentaires de l'électrocinétique aux bornes de la bobine d'inductance Ldz , établir à l'ordre le plus bas une relation entre L , $u(z, t)$, $i(z, t)$ et (ou) leurs dérivées premières.

I.A.1.c En déduire que les fonctions $i(z, t)$ et $u(z, t)$ satisfont à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} \quad \text{I-1}$$

Donner la signification du coefficient v et établir son expression en fonction L et C .

En vérifier la dimension.

I.A.1.d Quelle est la solution générale de l'équation (I-1) ?

Donner l'interprétation physique de ses différents termes.

I.A.2 *Évaluation des coefficients L et C .*

I.A.2.a La quantité C est la capacité par unité de longueur d'un condensateur cylindrique, celui formé par l'âme, le diélectrique et la gaine.

En considérant, dans l'ARQS, une longueur Δz de condensateur portant les charges $+Q$ et $-Q$ sur les surfaces en regard, exprimer le champ électrique $\vec{E}$ qui règne à la distance ρ de l'axe, avec $R_1 < \rho < R_2$. En déduire l'expression de C en fonction de ϵ , R_1 et R_2 .

I.A.2.b Établir l'expression du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ dans l'espace entre les conducteurs en fonction de μ_0 , i et ρ .

On négligera, dans le cadre de l'ARQS, les courants de déplacement.

Calculer le flux $d\phi$ du champ magnétique à travers la surface rectangulaire dS de hauteur dz dans l'espace entre les conducteurs (fig. 3)

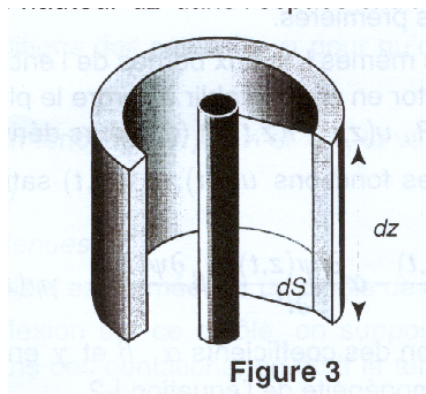


Figure 3

En déduire l'expression de L en fonction de μ_0 , R_1 et R_2 .

I.A.2.c Retrouver la relation de Maxwell qui lie v , ϵ et μ_0 dans le milieu et montrer que la vitesse de propagation du signal s'exprime en fonction de c , la vitesse de la lumière dans le vide et de $n = \sqrt{\epsilon_r}$, l'indice diélectrique à la fréquence d'utilisation.

I.B Prise en compte des pertes.

Les pertes dans le câble coaxial sont prises en compte en ajoutant deux éléments résistifs au schéma précédent. Le premier, de résistance Rdz est en série avec la bobine et le second, de conductance Gdz , est en parallèle avec le condensateur (fig. 4).

Les grandeurs R et G sont relatives à l'unité de longueur.

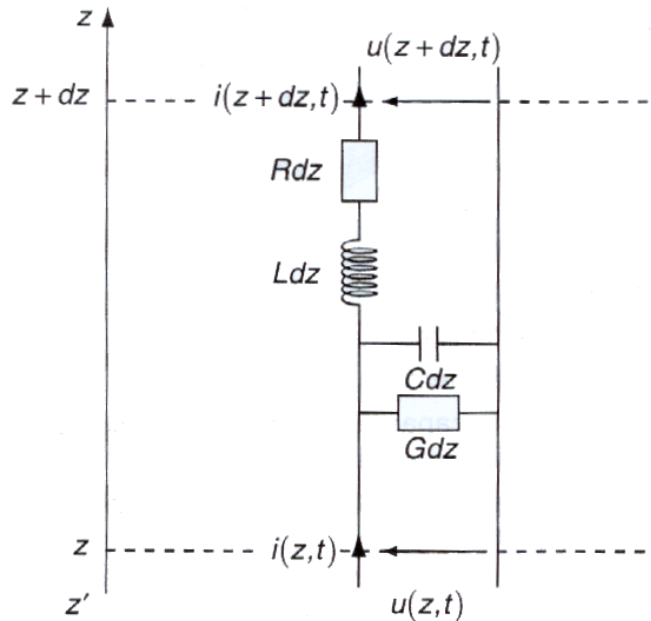


Figure 4

I.B.1 L'équation du télégraphiste.

I.B.1.a En appliquant les lois élémentaires de l'électrocinétique aux bornes de l'ensemble constitué du condensateur et du résistor en parallèle, établir à l'ordre le plus bas une première relation entre C , G , $u(z, t)$, $i(z, t)$ et (ou) leurs dérivées premières.

I.B.1.b En appliquant ces mêmes lois aux bornes de l'ensemble constitué de la bobine et du résistor en série, établir à l'ordre le plus bas une deuxième relation entre L , R , $u(z, t)$, $i(z, t)$ et (ou) leurs dérivées premières.

I.B.1.c En déduire que les fonctions $u(z, t)$ et $i(z, t)$ satisfont à l'équation du télégraphiste:

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} - \gamma \psi(z, t) = 0 \quad \text{I-2}$$

Donner l'expression des coefficients α , β et γ en fonction de L , R , C et G . Vérifier l'homogénéité de l'équation I-2.

I.B.2 On cherche des *solutions sinusoïdales de l'équation (I-2)*, qu'on écrit en notation complexe :

$$\underline{\psi}(z, t) = \underline{\phi}(z) e^{j\omega t}$$

I.B.2.a Donner l'équation différentielle satisfaite par la fonction complexe $\underline{\phi}(z)$.

I.B.2.b On postule à cette équation une solution du type

$$\underline{\phi}(z) = A e^{\gamma z}$$

où A est une constante (complexe).

Montrer qu'alors γ est solution de l'équation caractéristique:

$$\underline{L}^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega) \quad \text{I-3}$$

Sans chercher à identifier explicitement les coefficients k' et k'' , montrer qu'on peut écrire:

$$\underline{L} = \pm \underline{k}$$

avec $\underline{k} = k' + jik''$, où k' et k'' sont des coefficients réels positifs.

I.B.2.c En déduire que la solution générale de l'équation (I-2) peut se mettre sous la forme:

$$\underline{u}(z, t) = \underline{A} e^{k'z} e^{j(\omega t + k''z)} + \underline{B} e^{-k'z} e^{j(\omega t - k''z)} \quad \text{I-4}$$

Donner l'interprétation physique des différents termes de cette solution.

I.B.3 *Impédance caractéristique.*

On appelle impédance caractéristique (complexe) $\underline{Z}_C$ d'une ligne le rapport de la tension sur le courant au cours de la propagation progressive:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+}$$

I.B.3.a Écrire *a priori* l'expression de $\underline{u}^+(z, t)$ et de $\underline{i}^+(z, t)$ en fonction de leurs amplitudes respectives $\underline{U}_0^+$, $\underline{I}_0^+$ et de $k'z$, $k''z$, ωt .

I.B.3.b En déduire, à l'aide de l'équation établie en I.B.1.a par exemple, une relation entre $\underline{u}^+$ et $\underline{i}^+$.

Montrer qu'on obtient

$$\underline{Z}_C = \frac{R + jL\omega}{G + jC\omega} \quad \text{I-5}$$

I.B.3.c Quelles conditions doit satisfaire ω pour qu'on puisse négliger les pertes ?

Quelle est, en fonction de μ_0 , ν et $\frac{R_2}{R_1}$, la valeur de $\underline{Z}_C$ pour une ligne sans pertes ?

I.B.4 *Ondes entretenues.*

La ligne coaxiale est fermée sur un dipôle de charge D.

Due à la réflexion sur ce dipôle, on suppose l'existence d'une onde réfléchie. Dans ces conditions, on écrit la tension $\underline{u}$ en z à l'instant t comme la somme:

$$\underline{u}(z, t) = \underline{U}_0^+ e^{j(\omega t - kz)} + \underline{U}_0^- e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{I-6}$$

où $\underline{U}_0^+$ et $\underline{U}_0^-$ sont les amplitudes complexes des ondes de tension incidente et réfléchie.

I.B.4.a En déduire l'expression de $\underline{i}(z, t)$ en fonction de $\underline{Z}_C$, $\underline{U}_0^+$, $\underline{U}_0^-$, e^{+kz} et e^{-kz} .

I.B.4.b Montrer que l'impédance $\underline{Z}(z) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ en un point z de la ligne s'exprime en fonction de $\underline{Z}_C$, $\underline{U}_0^+$, $\underline{U}_0^-$, e^{+kz} et e^{-kz} .

I.B.4.c La ligne coaxiale est alimentée par un générateur électrique qui impose en $z = 0$, c'est-à-dire à l'entrée de la ligne une tension sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude V_0 , qu'on écrit en notation complexe:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t}$$

À l'autre extrémité, en $z = \ell$, ℓ étant la longueur de la ligne, le dipôle de charge D a une impédance Z_D .

En déduire deux équations qui résultent de ces contraintes.

Montrer que les valeurs de $\underline{U}_0^+$ et $\underline{U}_0^-$, sont alors déterminées.

I.B.4.d Calculer les valeurs prises par $\underline{U}_0^+$ et $\underline{U}_0^-$, en fonction de V_0 , $\underline{k}$, ℓ , Z_C et Z_D .

En déduire que:

$$\underline{Z}(z) = Z_C \frac{Z_D \cosh \underline{k}(\ell - z) + Z_C \sinh \underline{k}(\ell - z)}{Z_D \sinh \underline{k}(\ell - z) + Z_C \cosh \underline{k}(\ell - z)} \quad \text{I-7}$$

I.B.4.e Exprimer $u(z, t)$ et $i(z, t)$ en fonction de Z_C , Z_D , $v(t)$ et des fonctions $\sinh \underline{k}\ell$, $\cosh \underline{k}\ell$, $\sinh \underline{k}(\ell - z)$ et $\cosh \underline{k}(\ell - z)$.

Montrer, à condition que $Z_C \neq Z_D$, qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{\cosh[\underline{k}(\ell - z) \underline{\phi}]}{\cosh[\underline{k}\ell + \underline{\phi}]} v(t) \\ i(z, t) &= \frac{1}{Z_C} \frac{\sinh[\underline{k}(\ell - z) \underline{\phi}]}{\cosh[\underline{k}\ell + \underline{\phi}]} v(t) \end{aligned} \quad \text{I-8}$$

$$\text{où l'on a posé } \cosh \underline{\phi} = \frac{Z_D}{\sqrt{Z_D^2 - Z_C^2}} \text{ et } \sinh \underline{\phi} = \frac{Z_C}{\sqrt{Z_D^2 - Z_C^2}}$$

Quelle est la nature des ondes de tension et d'intensité obtenues ?

I.B.5 *Adaptation d'impédance.*

I.B.5.a À quelle condition la ligne transmet-elle une puissance maximale ? Montrer qu'alors $\underline{Z}(z)$ ne dépend plus de z et donner sa valeur.

I.B.5.b Comparer avec l'impédance d'une ligne infinie. Commenter ce résultat.

I.B.6 *Expression de l'impédance d'entrée pour une ligne sans pertes.*

I.B.6.a On note $\underline{k}^{SP} = k' + jk''$ et $\underline{Z}_C^{SP}$ la valeur de $\underline{k}$ et celle de Z_C pour une ligne sans pertes.

Donner les expressions de k' , k'' et $\underline{Z}_C^{SP}$ en fonction de ω , L et C .

I.B.6.b Que vaut alors l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e^{SP} = \underline{Z}^{SP}(0)$ en fonction de Z_D , $\underline{Z}_C^{SP}$ et $\tan k''\ell$?

Donner son expression pour les cas particuliers suivants:

- ligne ouverte à son extrémité
- ligne en court-circuit à son extrémité

$$k''\nmid = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \text{ et } k''\nmid = n\pi \text{ où } n \text{ est un nombre entier.}$$

II. PARTIE II

ÉTUDE D'UNE ONDE GUIDÉE DANS UN CÂBLE COAXIAL

Dans l'espace séparant l'âme et la gaine et contenant le diélectrique se propage parallèlement à l'axe Oz une onde électromagnétique: c'est la propagation guidée d'une onde par un câble coaxial.

II.A Détermination du champ électromagnétique.

En un point M de coordonnées cylindriques ρ, θ, z , ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires associés), on rappelle que:

(1) pour un vecteur $\vec{A}(M) = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

(2) pour une fonction scalaire $f(\rho, \theta, z)$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

II.A.1 Détermination du champ électrique.

Au point $M(\rho, \theta, z)$, cette onde se compose à l'instant t du champ électrique radial $\vec{E}$ (M, t) qu'on écrit en notation complexe:

$$\vec{E}(M, t) = E_0(\rho) e^{j(kz - \omega t)} \vec{u}_\rho \quad \text{II-1}$$

où k est le nombre d'onde et ω la pulsation.

On suppose de plus que l'amplitude E_0 du champ électrique sur la surface de l'âme vaut E_1 :

$$E_0(\rho = R_1) = E_1$$

II.A.1.a Donner la vitesse de phase v de l'onde en fonction de ω et k .

II.A.1.b Quelle est l'équation de Maxwell satisfaite par $\vec{E}$ dans l'espace entre l'âme et la gaine ?

II.A.1.c En déduire la fonction $E_0(\rho)$ et tracer son graphe pour $0 < \rho < R_3$ en supposant que l'âme et la gaine sont parfaitement conductrices.

II.A.2 Détermination du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé.

II.A.2.a Donner l'équation satisfaite par le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé à $\vec{E}(M, t)$.

II.A.2.b En déduire l'expression de $\vec{B}(M, t)$ dans les coordonnées cylindriques en fonction de E_1, R_1, ρ, v et $(kz - \omega t)$.

II.B Vecteur de Poynting et puissance transportée.

II.B.1 Soit $\vec{P}(M, t)$, le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique à l'instant t . Donner son expression en fonction de μ_0 , E_1 , R_1 , ρ , v et $(kz - \omega t)$.

Calculer $\langle \vec{P}(M, t) \rangle_t$, valeur moyenne de $\vec{P}$ dans le temps.

II.B.2 Calculer la puissance moyenne P transportée par la ligne coaxiale en fonction de E_1 , R_1 , R_2 , v et ϵ .

II.B.3 À ce milieu diélectrique parfait, on associe la densité d'énergie électromagnétique volumique libre:

$$\epsilon_{em} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{II-2}$$

II.B.3.a *A priori*, quelle relation a-t-on entre ϵ_{em} et $\vec{P}$ sachant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie électromagnétique ?

II.B.3.b Exprimer la densité volumique d'énergie $\epsilon_{em}(M, t)$ en un point M du diélectrique au temps t en fonction de E_1 , R_1 , ρ , ϵ et $(kz - \omega t)$.

Vérifier alors la relation de conservation II.B.3.a.

II.B.3.c En déduire l'énergie électromagnétique moyenne $W(h)$ emmagasinée sur une hauteur h de cette ligne coaxiale en fonction de E_1 , R_1 , R_2 , ϵ et h .

II.C Calcul de l'impédance caractéristique de cette ligne.

II.C.1 *Calcul de la différence de potentiel entre l'âme et la gaine.*

II.C.1.a Exprimer le potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ en un point M de l'espace entre l'âme et la gaine en fonction de E_1 , R_1 , ρ , v , et $(kz - \omega t)$. On prendra $\vec{A}$ parallèle à Oz et nul à la surface de l'âme.

II.C.1.b En déduire l'expression du potentiel scalaire $V(M, t)$.

On choisira $V = 0$ à la surface de l'âme.

II.C.1.c Exprimer la différence de potentiel $\underline{u}^+(z, t) = V(R_1, z, t) - V(R_2, z, t)$ entre l'âme et la gaine à z et à t donnés, en fonction de E_1 , R_1 , R_2 et $(kz - \omega t)$.

II.C.2 Calculer le courant $\underline{I}^+(z, t)$ qui circule dans l'âme en négligeant les courants de déplacement.

11-C-3 *L'impédance caractéristique* (définie en I.B.3).

II.C.3.a En déduire, en fonction de μ_0 , v et $\frac{R_2}{R_1}$, la valeur de l'impédance caractéristique Z_C de cette ligne.

II.C.3.b Application numérique:

Donner la valeur de Z_C sachant que $R_1 = 1$ mm et $R_2 = 2,5$ mm.

On prendra $v \cong c = 3.10^8$ m.s⁻¹ et l'on rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI.

II.D L'âme du câble coaxial a en réalité une conductivité finie γ .

II.D.1 Exprimer la résistance dR de la longueur dz de la ligne, en supposant la répartition du courant uniforme. En déduire la puissance instantanée dP , puis la puissance moyenne $dP = -\langle dP \rangle_t$ dissipée sur la longueur dz .

Que néglige-t-on avec l'hypothèse de courants uniformément répartis dans l'âme du câble ?

II.D.2 Exprimer la puissance moyenne relative $\frac{dP}{P}$ perdue dans ces conditions sur une hauteur dz de câble. On donnera ce résultat en fonction de dz , γ , R_{eff} et Z_C .

En déduire la puissance transmise par la ligne $P(z)$ en z en fonction de la puissance $P_0 = P_{(z=0)}$.

II.D.3 *Longueur d'atténuation de la ligne.*

II.D.3.a Donner la longueur d'atténuation a de la ligne, c'est-à-dire la longueur au bout de laquelle la puissance transmise est divisée par le facteur $e = 2,72$.

Vérifier la dimension de a .

II.D.3.b Calculer la valeur de a pour une âme en cuivre pour lequel $\gamma = 58.10^6 \text{ S.m}^{-1}$.

Annexe

Les fonctions hyperboliques sont définies, pour $x \in \mathbb{R}$, par:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -j \sin jx$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos jx$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = -j \tan jx$$

A partir de ces définitions, on peut démontrer la relation:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

ainsi que les formules d'addition:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$$

Ces définitions et relations peuvent être étendues à des variables complexes. On a en particulier:

$$\operatorname{ch} jx = \cos x$$

$$\operatorname{sh} jx = j \sin x$$

$$\operatorname{th} jx = j \tan x$$

$$\operatorname{sh}(x \pm jy) = \operatorname{sh} x \cdot \cos y \pm j \operatorname{ch} x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm jy) = \operatorname{ch} x \cdot \cos y \pm j \operatorname{sh} x \cdot \sin y$$

FIN DE L'ÉPREUVE