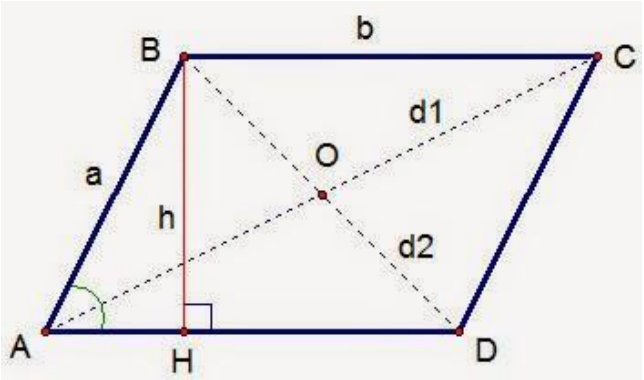
25. Четырехугольники

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется параллелограммом.



Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны: AB=CD, AD=BC.

2. Противоположные углы параллелограмма равны: ∠A=∠C, ∠B=∠D.

3. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам AO=OC, BO=OD.

4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

5. Каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

6. Сумма внутренних углов параллелограмма 360°.

7. Сумма углов при двух соседних вершинах равна 180°.

Признаки параллелограмма

1. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

3. Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

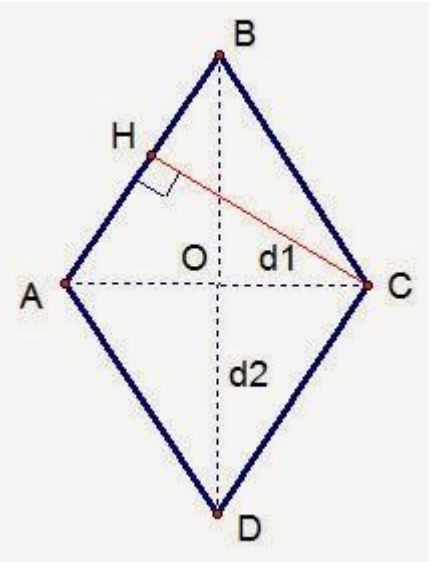
Площадь параллелограмма

1. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: **S=BH*AD.**

2. Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними: **S=AB*AD*sin A.**

РОМБ

Параллелограмм у которого все стороны равны называется ромбом.



Свойства ромба

Так ромб является параллелограммом, то он имеет все свойства параллелограмма.

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны: AC ⊥ BD.

2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

1. Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм - ромб.

2. Если у параллелограмма одна из диагоналей лежит на биссектрисе, то этот параллелограмм - ромб.

Площадь ромба

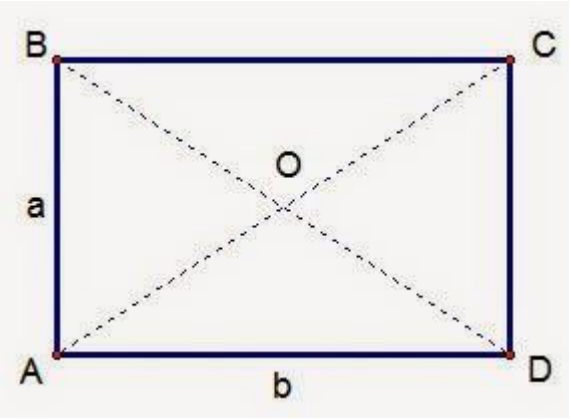
1. Площадь ромба равна произведению его основания на высоту: **S=CH*AB.**

2. Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла между сторонами: **$S=AB^2*\sin A$.**

3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: **S=(d1*d2):2.**

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Параллелограмм, у которого все углы прямые называется прямоугольником.



Свойства прямоугольника

Так прямоугольник является параллелограммом, то он имеет все свойства параллелограмма.

1. Диагонали прямоугольника равны.

Признак прямоугольника

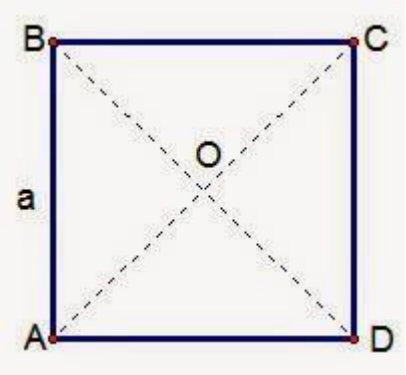
Если у параллелограмма диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: **S = a*b.**

КВАДРАТ

Прямоугольник, у которого все стороны равны называется квадратом.



Свойства квадрата

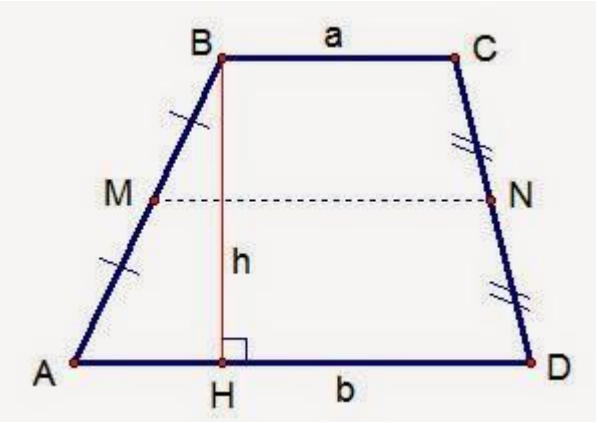
Квадрату имеет все свойства параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Площадь квадрата

Площадь квадрата равна квадрату его стороны: $S=a^2$

ТРАПЕЦИЯ

Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны называется трапецией.



Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями** **(AD и BC)**, а две другие - **боковыми сторонами** **(AB и CD)**.

Трапеция, боковые стороны которой равны (AB=CD), называется **равнобедренной**.
У равнобедренной трапеции углы при основании равны: **∠A=∠D, ∠B=∠C.**
Диагонали равнобедренной трапеции равны: AC=BD.

Трапеция, у которой есть прямой угол называется **прямоугольной**.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции.**

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции равна их полусумме: **MN=(a+b):2.**

Средняя линия трапеции делит высоту трапеции на два равных отрезка.

Площадь трапеции

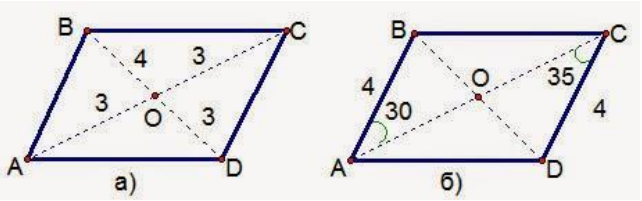
Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту: **S =(a+b):2*h**.

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Любой ли параллелограмм является ромбом:
1) Да; 2) Нет; 3) зависит от длин его сторон; 4) зависит от величин его углов.
б) Любой ли параллелограмм является прямоугольником:
1) Да; 2) Нет; 3) зависит от длин его сторон; 4) зависит от величин его углов.
Решение:
а)зависит от длин его сторон.
Ответ: 3.

---

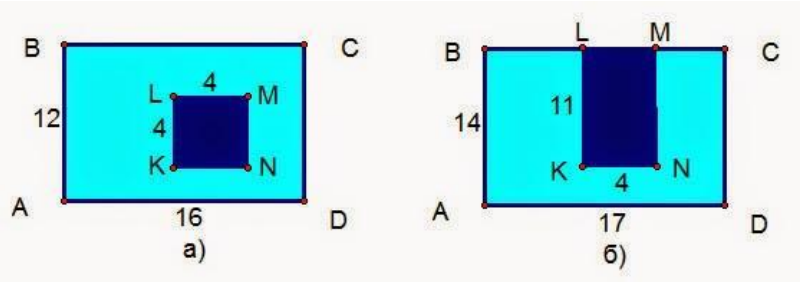
2. Является ли четырехугольник параллелограммом:



Решение:
а) В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, т.е. должно быть AO=OC и BO=OD, но BO не равно OD (3 не равно 4).
Ответ: не является.

---

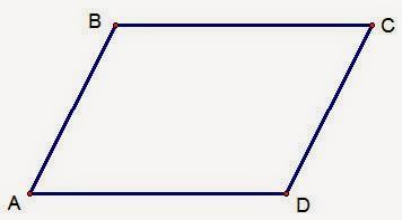
3. Найдите площадь закрашенной голубым цветом фигуры:



Решение:
*а) Площадь прямоугольника ABCD равна 12*16=192.*
*Площадь квадрата KLMN равна 4*4=16.*
Площадь фигуры, закрашенной голубым цветом равна 192-16=176.
Ответ: 176 кв.ед.

---

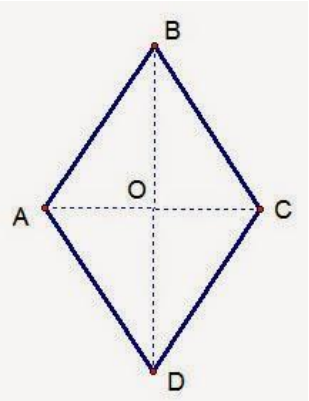
4. а) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 160°. Найдите все углы параллелограмма.
б) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 20°. Найдите все углы параллелограмма.
Решение:
а)



∠A+∠C=160°, т.к. противоположные углы параллелограмма равны, то ∠A=∠C=80°.
∠A+∠B =180° - по свойствам параллелограмма, тогда ∠B=180°-80°=100°.
Т.к. противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle B = \angle D = 100°$.
Ответ: 80°, 100°, 80°, 100°.

---

5. а) Периметр ромба равен 24 см, а один из углов равен 120°. Найдите большую диагональ ромба.
б) Один из углов ромба равен 60°. Найдите периметр ромба, если его меньшая диагональ равна 4 см.
Решение:
а)

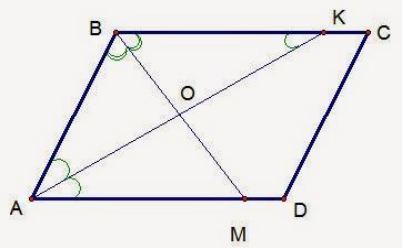


1) У ромба все стороны равны, тогда AB=P:4=24:4=6 см.
2) Пусть ∠A=120°, тогда большая диагональ ромба BD.
BD=BO+OD, т.к. диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
3) ∠BAO=120°: 2=60°, т.к. диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
4) Рассмотри треугольник ABO, он прямоугольный, т.к. диагонали ромба пересекаются под прямым углом.
5) Найдем BO:
*BO=AB*sin ∠BAO;*

$BO=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, тогда $BD=2BO=6\sqrt{3}$ см

---

6. а) Докажите, что биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD взаимно перпендикулярны.
б) Докажите, что биссектрисы углов A и C параллелограмма ABCD параллельны.
Решение:
а)

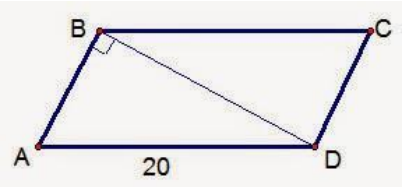


Доказательство:
1) ∠DAK=∠BKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK.
2) ∠BAK=∠KAD, т.к. AK - биссектриса угла BAD.
3) Следовательно, ∠BAK=∠BKA, тогда треугольник ABK - равнобедренный.
4) Биссектриса BO в равнобедренном треугольнике ABK является и высотой, т.е. BO перпендикулярно AK, а следовательно BM перпендикулярно AK.
Что и требовалось доказать.

---

7. а) Диагональ DB параллелограмма ABCD перпендикулярна стороне AB. cosA=3/5. Сторона AD=20 см. Найдите площадь параллелограмма.
б) Диагональ AC параллелограмма ABCD перпендикулярна стороне CD. sin CAD=2/3. Сторона AD=15 см. Найдите площадь параллелограмма.
Решение:

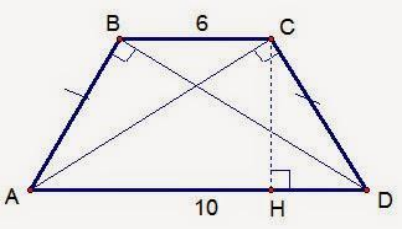
а)



*Площадь параллелограмма может быть вычислена по формуле S=BD*AB.*
1) Найдем AB:
*cos A=AB:AD, AB=AD*cos A=20*3/5=12 см.*
2) Найдем BD:
По теореме Пифагора: $BD^2=AD^2-AB^2=400-144=256$, BD=16 см.
3) Найдем площадь:
*S=16*12=192 см^2*
Ответ: 192 см^2

---

8. а) В равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 6 см диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции.
б) Площадь равнобедренной трапеции равна 54 см^2. Средняя линия трапеции равна 9 см. Диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найдите основания трапеции.
Решение:
а)



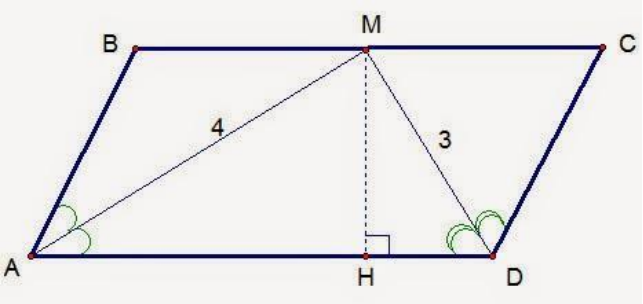
1) Треугольник ACD прямоугольный. Проведем к гипотенузе этого треугольника высоту CH.
HD=(AD-BC):2=(10-6):2=2 см, т.к. ABCD - равнобедренная трапеция.
2)$CH^2=AH*HD=10*2=20$,

$CH = 2\sqrt{5}$ см

2) $S = \frac{BC + AD}{2} CH = \frac{6+10}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ см^2

---

9. а) AM и DM - биссектрисы параллелограмма ABCD. M лежит на стороне BC параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если AM=4 см, DM=3 см.
б) BM и CM - биссектрисы параллелограмма ABCD. M лежит на стороне AD параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если BM=6 см, CM=4 см.
Решение:
а)



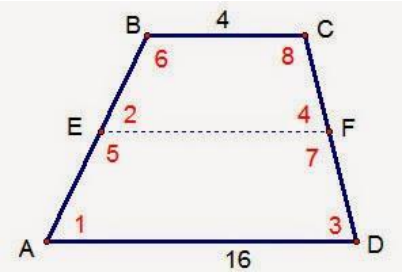
1) Найдем угол AMD:
$\angle A+\angle D=180^\circ$ как углы при соседних вершинах. $\angle MAD+\angle ADM=(\angle A+\angle D):2=90^\circ$, т.к. AM и DM - биссектрисы углов A и D.
Тогда $\angle AMD=180-(\angle MAD+\angle ADM)=180-90=90^\circ$.
2) Треугольник AMD - прямоугольный, тогда по теореме Пифагора найдем AD:
$AD^2=AM^2+MD^2=16+9=25$, AD=5 см.
3) Найдем высоту параллелограмма.
MH - высота в прямоугольном треугольнике, а также и высота параллелограмма.
*S_{AMD} = AM*MD:2=4*3:2=6 см.*
*S_{AMD} = MH*AD:2; 6=MH*5:2; MH=2,4 см*
4) Найдем площадь параллелограмма:
*S=MH*AD=2,4*5=12 см^2.*
Ответ: 12 см^2.

---

10. а) В трапеции ABCD проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает боковые стороны трапеции в точках E и F. Найти площадь трапеции AEFD, если площадь трапеции EBCF равна 20 см^2 и BC=4 см, EF=8 см, AD=16 см.

б) В трапеции ABCD проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найти площадь трапеции MBCN, если площадь трапеции AMND равна 48 см^2 и BC=4 см, MN=6 см, AD=9 см.

Решение:
а)



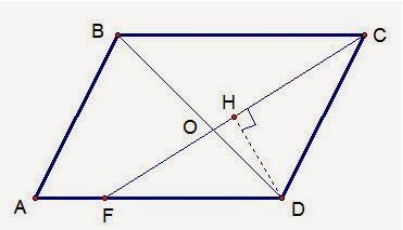
1) Трапеции AEFD и EBCF подобны:
1. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ как соответственные углы при параллельных прямых EF и AD.
2. $\angle 5=\angle 6$, $\angle 7=\angle 8$ как соответственные углы при параллельных прямых EF и BC.
2) Найдем коэффициент подобия:
k=EF:BC=8:4=2.
3) Площади подобных фигур относятся как коэффициент подобия в квадрате.
$S_{AEFD} = S_{EDCF} *k^2= 20*4=80$ см^2.
Ответ: 80 см^2.

---

11. а) В параллелограмме ABCD отрезок CF пересекает диагональ BD в точке O (F лежит на стороне AD). Найдите площадь параллелограмма, если площади треугольников ODF и CDO раны 12 см^2 и 20 см^2 соответственно.

б) В параллелограмме ABCD отрезок BF пересекает диагональ AC в точке O (F лежит на стороне AD). Найдите площадь параллелограмма, если площади треугольников OFA и OBA раны 12 см^2 и 8 см^2 соответственно.

Решение:
а)

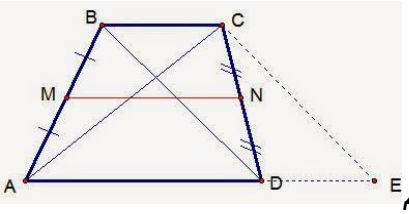


1) Проведем к CF высоту DH.
Рассмотрим площади треугольников FOD и OCD:
S_{ODF} = DH*OE:2; 12= DH*OE:2; DH*OF=24. (1)

S_{CDO} = DH*OC:2; 20 = DH*OC:2; DH*OC=40. (2)
Разделим выражение (2) на (1): OC:OF=40:24, OC:OF=5:3.
2) Треугольники BOC и FOD подобны по двум углам:
1. ∠FOD=∠BOC как вертикальные углы;
2. ∠CFD=∠FCB как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей FC.
3) Площади подобных фигур относятся как коэффициент подобия в квадрате.
$S_{BOC} = S_{FOD}*k^2=12*(5/3)^2=100/3$ см^2.
4) Найдем площадь треугольника BCD:
$S_{BCD}= S_{BCO} + S_{OCD}=100/3+20=53\ 1/3$ см^2.
5) Найдем площадь параллелограмма:
$S_{ABCD}=2*S_{BCD}=106\ 2/3$ см^2.
Ответ: 106 2/3 см^2.

---

12. а) Средняя линия трапеции равна 5 см, диагонали трапеции равны 14 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.
б) Средняя линия трапеции равна 10 см, диагонали трапеции равны 14 см и 10 см. Найдите площадь трапеции.
Решение:
а)



Дано: ABCD - трапеция;
AC=14 см;

BD=8 см;

MN - средняя линия; MN=5 см.

Найти: S трапеции.
*1) AD+BC=2*MN=2*5=10 см.*
2) AB+CD=BC+AD=10 см.
3) Проведем прямую CE параллельно прямой BD. E - точка пересечения прямых AD и CE.
DBCE - параллелограмм, т.к. две пары противолежащих сторон параллельны.
DE=BC и BD=CE=8 см, т.к. противолежащие стороны параллелограмма равны.
AE=AD+DE=AD+BC=10 см.

4) Найдем площадь треугольника ACE по формуле Герона:
p=(AC+CE+AE):2=(14+8+10):2=16 см.

$$S = \sqrt{16(16-10)(16-8)(16-14)} = \sqrt{16*2*3*2*4*2} = 16\sqrt{6}$$

5) Найдем площадь трапеции:
Треугольники ABC и CED имеют одинаковую площадь, т.к. их площади равны половине произведения высоты трапеции на равные стороны BC и DE.
Тогда площадь трапеции равна площади треугольника ACE:

$S_{ABCD}=16\sqrt{6}$ см^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то это:
а) квадрат; б) ромб; в) трапеция; г) прямоугольник; д) параллелограмм.

2. Является ли четырехугольник параллелограммом, если одна пара его противоположных сторон равна, а другая параллельна?

3. В равнобедренной трапеции ABCD с основаниями AB и CD сумма углов A, B, C равна 340°. Найдите все углы трапеции.

4. В параллелограмме ABCD угол A равен 60°, сторона BC равна 10 см, высота CH проведена из вершины C к стороне AD и AH=14 см. Найдите периметр параллелограмма.

5. Диагонали ромба относятся как 2:5. Найдите площадь ромба, если его периметр равен 10 см.

6. Площадь прямоугольника равна 54 см^2. Найдите площадь четырехугольника вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника.

7. В параллелограмме ABCD к сторонам BC и DC проведены высоты из точки A, угол между высотами равен 45° и одна из высот делит сторону DC на отрезки 3 см и 4 см, считая от вершины C. Найдите площадь параллелограмма.

8. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны 12 см и 16 см.

9. Может ли четырехугольник с противоположными наборами сторон a и b, c и d являться трапецией, если да, то найти ее площадь:
а) a=5 см, b=4 см, c=6 см, d=3 см; б) a= 3 см, b=4 см, c=5 см, d=3 см.

10. Площадь трапеции ABCD равна 100 см^2. Из середины стороны AB к стороне CD проведен перпендикуляр, который равен 16 см. Найдите боковую сторону CD.