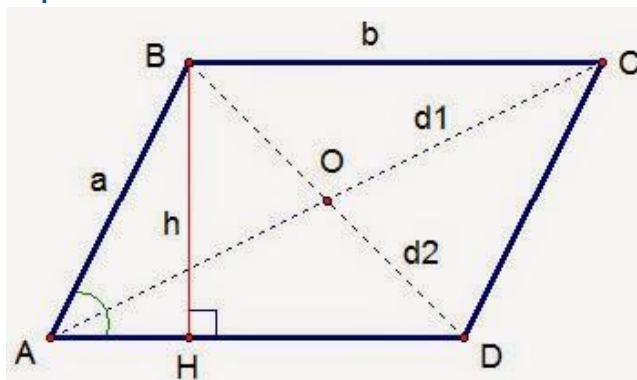


25. Четырехугольники

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется **параллелограммом**.



Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB=CD$, $AD=BC$.
2. Противоположные углы параллелограмма равны: $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.
3. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам $AO=OC$, $BO=OD$.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.
5. Каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
6. Сумма внутренних углов параллелограмма 360° .
7. Сумма углов при двух соседних вершинах равна 180° .

Признаки параллелограмма

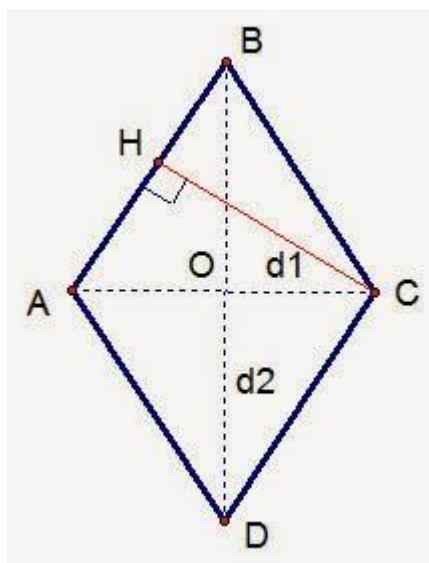
1. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.
3. Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Площадь параллелограмма

1. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: $S=BH*AD$.
 2. Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними: $S=AB*AD*\sin A$.
-

РОМБ

Параллелограмм у которого все стороны равны называется **ромбом**.



Свойства ромба

Так ромб является параллелограммом, то он имеет все свойства параллелограмма.

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

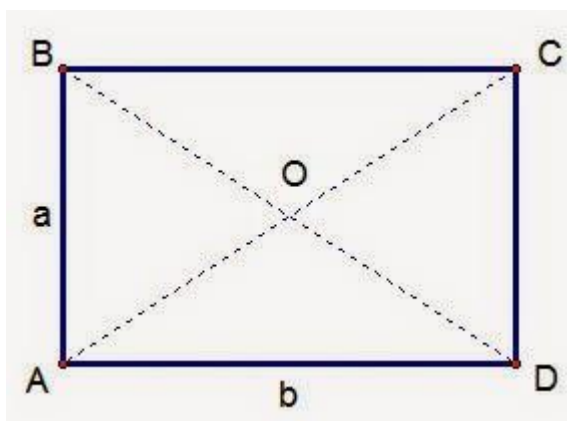
1. Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм - ромб.
2. Если у параллелограмма одна из диагоналей лежит на биссектрисе, то этот параллелограмм - ромб.

Площадь ромба

1. Площадь ромба равна произведению его основания на высоту: $S = CH \cdot AB$.
2. Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла между сторонами: $S = AB^2 \cdot \sin A$.
3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = (d1 \cdot d2) : 2$.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Параллелограмм, у которого все углы прямые называется **прямоугольником**.



Свойства прямоугольника

Так прямоугольник является параллелограммом, то он имеет все свойства параллелограмма.

1. Диагонали прямоугольника равны.

Признак прямоугольника

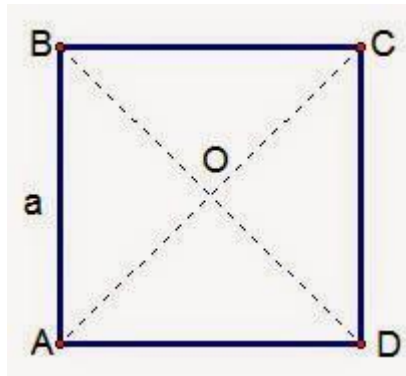
Если у параллелограмма диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S = a \cdot b$.

КВАДРАТ

Прямоугольник, у которого все стороны равны называется **квадратом**.



Свойства квадрата

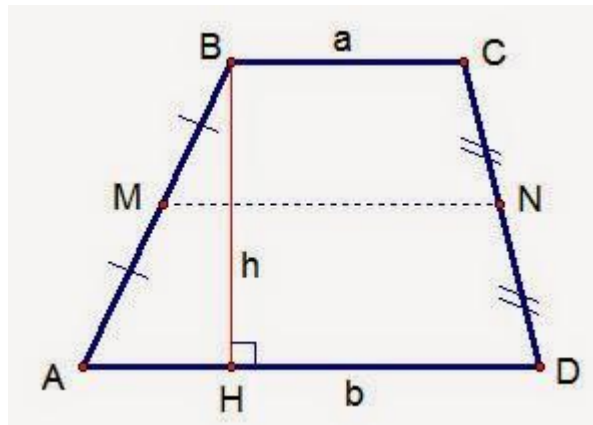
Квадрату имеет все свойства параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Площадь квадрата

Площадь квадрата равна квадрату его стороны: $S = a^2$

ТРАПЕЦИЯ

Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны называется **трапецией**.



Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями** (AD и BC), а две другие - **боковыми сторонами** (AB и CD).

Трапеция, боковые стороны которой равны ($AB=CD$), называется **равнобедренной**.

У равнобедренной трапеции углы при основании равны: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

Диагонали равнобедренной трапеции равны: $AC=BD$.

Трапеция, у которой есть прямой угол называется **прямоугольной**.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции равна их полусумме: $MN=(a+b):2$.

Средняя линия трапеции делит высоту трапеции на два равных отрезка.

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту: $S=(a+b):2 \cdot h$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Любой ли параллелограмм является ромбом:

1) Да; 2) Нет; 3) зависит от длин его сторон; 4) зависит от величин его углов.

б) Любой ли параллелограмм является прямоугольником:

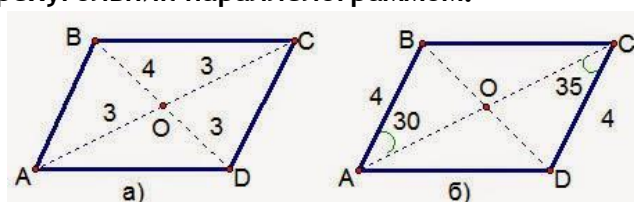
1) Да; 2) Нет; 3) зависит от длин его сторон; 4) зависит от величин его углов.

Решение:

а) зависит от длин его сторон.

Ответ: 3.

2. Является ли четырехугольник параллелограммом:

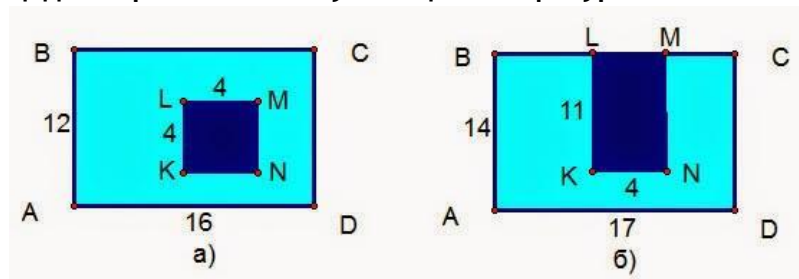


Решение:

а) В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, т.е. должно быть $AO=OC$ и $BO=OD$, но BO не равно OD (3 не равно 4).

Ответ: не является.

3. Найдите площадь закрашенной голубым цветом фигуры:



Решение:

а) Площадь прямоугольника ABCD равна $12 \cdot 16 = 192$.

Площадь квадрата KLMN равна $4 \cdot 4 = 16$.

Площадь фигуры, закрашенной голубым цветом равна $192 - 16 = 176$.

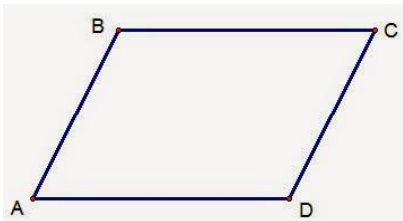
Ответ: 176 кв.ед.

4. а) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 160° . Найдите все углы параллелограмма.

б) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 20° . Найдите все углы параллелограмма.

Решение:

а)



$\angle A + \angle C = 160^\circ$, т.к. противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle A = \angle C = 80^\circ$.

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ - по свойствам параллелограмма, тогда $\angle B = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Т.к. противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle B = \angle D = 100^\circ$.

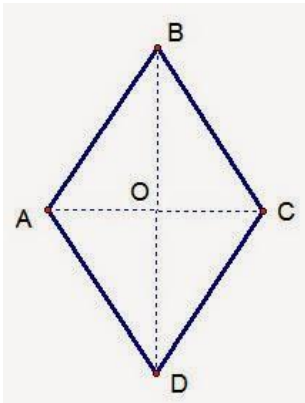
Ответ: $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$.

5. а) Периметр ромба равен 24 см, а один из углов равен 120° . Найдите большую диагональ ромба.

б) Один из углов ромба равен 60° . Найдите периметр ромба, если его меньшая диагональ равна 4 см.

Решение:

а)



- 1) У ромба все стороны равны, тогда $AB = P:4 = 24:4 = 6$ см.
- 2) Пусть $\angle A = 120^\circ$, тогда большая диагональ ромба BD .
 $BD = BO + OD$, т.к. диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
- 3) $\angle BAO = 120^\circ : 2 = 60^\circ$, т.к. диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- 4) Рассмотрим треугольник ABO , он прямоугольный, т.к. диагонали ромба пересекаются под прямым углом.
- 5) Найдем BO :
 $BO = AB \cdot \sin \angle BAO$;

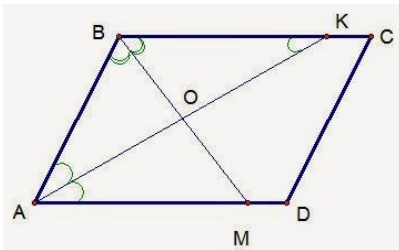
$$BO = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \text{ тогда } BD = 2BO = 6\sqrt{3} \text{ см}$$

6. а) Докажите, что биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

б) Докажите, что биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ параллельны.

Решение:

а)



Доказательство:

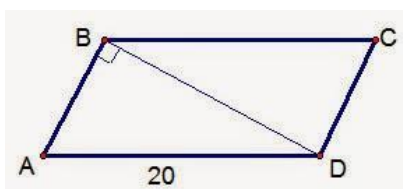
- 1) $\angle DAK = \angle BKA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK .
- 2) $\angle BAK = \angle KAD$, т.к. AK - биссектриса угла BAD .
- 3) Следовательно, $\angle BAK = \angle BKA$, тогда треугольник ABK - равнобедренный.
- 4) Биссектриса BO в равнобедренном треугольнике ABK является и высотой, т.е. BO перпендикулярно AK , а следовательно BM перпендикулярно AK .
 Что и требовалось доказать.

7. а) Диагональ DB параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB . $\cos A = 3/5$. Сторона $AD = 20$ см. Найдите площадь параллелограмма.

б) Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне CD . $\sin CAD = 2/3$. Сторона $AD = 15$ см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение:

а)



Площадь параллелограмма может быть вычислена по формуле $S = BD \cdot AB$.

1) Найдем AB:

$\cos A = AB : AD$, $AB = AD \cdot \cos A = 20 \cdot 3/5 = 12$ см.

2) Найдем BD:

По теореме Пифагора: $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 400 - 144 = 256$, $BD = 16$ см.

3) Найдем площадь:

$S = 16 \cdot 12 = 192$ см²

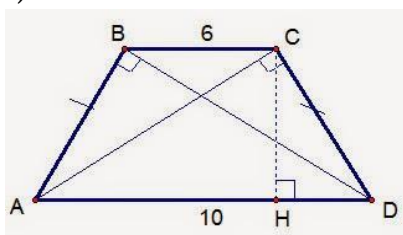
Ответ: 192 см²

8. а) В равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 6 см диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции.

б) Площадь равнобедренной трапеции равна 54 см². Средняя линия трапеции равна 9 см. Диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найдите основания трапеции.

Решение:

а)



1) Треугольник ACD прямоугольный. Проведем к гипотенузе этого треугольника высоту CH.

$HD = (AD - BC) : 2 = (10 - 6) : 2 = 2$ см, т.к. ABCD - равнобедренная трапеция.

2) $CH^2 = AH \cdot HD = 10 \cdot 2 = 20$,

$CH = 2\sqrt{5}$ см

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{6 + 10}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2$$

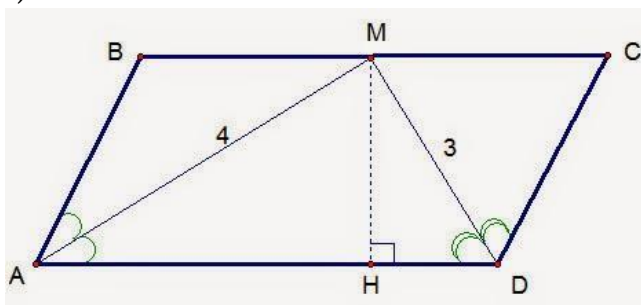
2)

9. а) AM и DM - биссектрисы параллелограмма ABCD. M лежит на стороне BC параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если AM=4 см, DM=3 см.

б) BM и CM - биссектрисы параллелограмма ABCD. M лежит на стороне AD параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если BM=6 см, CM=4 см.

Решение:

а)



1) Найдем угол AMD:

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ как углы при соседних вершинах. $\angle MAD + \angle ADM = (\angle A + \angle D) : 2 = 90^\circ$, т.к. AM и DM - биссектрисы углов A и D.

Тогда $\angle AMD = 180 - (\angle MAD + \angle ADM) = 180 - 90 = 90^\circ$.

2) Треугольник AMD - прямоугольный, тогда по теореме Пифагора найдем AD:

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 = 16 + 9 = 25, AD = 5 \text{ см.}$$

3) Найдем высоту параллелограмма.

MH - высота в прямоугольном треугольнике, а также и высота параллелограмма.

$$S_{AMD} = AM \cdot MD : 2 = 4 \cdot 3 : 2 = 6 \text{ см.}$$

$$S_{AMD} = MH \cdot AD : 2; 6 = MH \cdot 5 : 2; MH = 2,4 \text{ см}$$

4) Найдем площадь параллелограмма:

$$S = MH \cdot AD = 2,4 \cdot 5 = 12 \text{ см}^2.$$

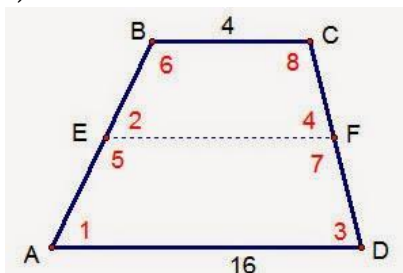
Ответ: 12 см^2 .

10. а) В трапеции ABCD проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает боковые стороны трапеции в точках E и F. Найти площадь трапеции AEFD, если площадь трапеции EBCF равна 20 см^2 и $BC = 4 \text{ см}$, $EF = 8 \text{ см}$, $AD = 16 \text{ см}$.

б) В трапеции ABCD проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найти площадь трапеции MBCN, если площадь трапеции AMND равна 48 см^2 и $BC = 4 \text{ см}$, $MN = 6 \text{ см}$, $AD = 9 \text{ см}$.

Решение:

а)



1) Трапеции AEFD и EBCF подобны:

1. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные углы при параллельных прямых EF и AD.

2. $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$ как соответственные углы при параллельных прямых EF и BC.

2) Найдем коэффициент подобия:

$$k = EF : BC = 8 : 4 = 2.$$

3) Площади подобных фигур относятся как коэффициент подобия в квадрате.

$$S_{AEFD} = S_{EBCF} \cdot k^2 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см}^2.$$

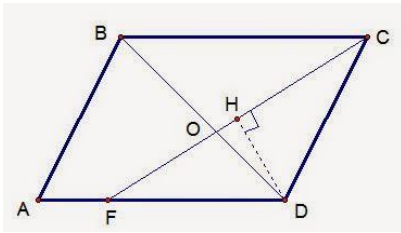
Ответ: 80 см^2 .

11. а) В параллелограмме ABCD отрезок CF пересекает диагональ BD в точке O (F лежит на стороне AD). Найдите площадь параллелограмма, если площади треугольников ODF и CDO равны 12 см^2 и 20 см^2 соответственно.

б) В параллелограмме ABCD отрезок BF пересекает диагональ AC в точке O (F лежит на стороне AD). Найдите площадь параллелограмма, если площади треугольников OFA и OBA равны 12 см^2 и 8 см^2 соответственно.

Решение:

а)



1) Проведем к CF высоту DH.

Рассмотрим площади треугольников FOD и OCD:

$$S_{ODF} = DH \cdot OF : 2; 12 = DH \cdot OF : 2; DH \cdot OF = 24. (1)$$

$$S_{CDO} = DH \cdot OC : 2; 20 = DH \cdot OC : 2; DH \cdot OC = 40. (2)$$

Разделим выражение (2) на (1): $OC : OF = 40 : 24$, $OC : OF = 5 : 3$.

2) Треугольники BOC и FOD подобны по двум углам:

1. $\angle FOD = \angle BOC$ как вертикальные углы;

2. $\angle CFD = \angle CFB$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей FC.

3) Площади подобных фигур относятся как коэффициент подобия в квадрате.

$$S_{BOC} = S_{FOD} \cdot k^2 = 12 \cdot (5/3)^2 = 100/3 \text{ см}^2.$$

4) Найдем площадь треугольника BCD:

$$S_{BCD} = S_{BCO} + S_{OCD} = 100/3 + 20 = 53 \frac{1}{3} \text{ см}^2.$$

5) Найдем площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{BCD} = 106 \frac{2}{3} \text{ см}^2.$$

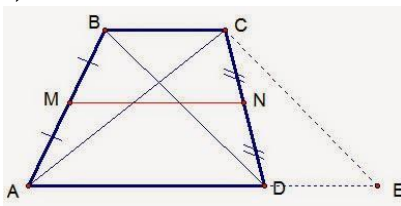
Ответ: $106 \frac{2}{3} \text{ см}^2$.

12. а) Средняя линия трапеции равна 5 см, диагонали трапеции равны 14 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

б) Средняя линия трапеции равна 10 см, диагонали трапеции равны 14 см и 10 см. Найдите площадь трапеции.

Решение:

а)



Дано: ABCD - трапеция;

$$AC = 14 \text{ см};$$

$$BD = 8 \text{ см};$$

MN - средняя линия; $MN = 5 \text{ см}$.

Найти: S трапеции.

$$1) AD + BC = 2 \cdot MN = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}.$$

$$2) AB + CD = BC + AD = 10 \text{ см}.$$

3) Проведем прямую CE параллельно прямой BD. E - точка пересечения прямых AD и CE.

DBCE - параллелограмм, т.к. две пары противоположных сторон параллельны.

$DE = BC$ и $BD = CE = 8 \text{ см}$, т.к. противоположные стороны параллелограмма равны.

$$AE = AD + DE = AD + BC = 10 \text{ см}.$$

4) Найдем площадь треугольника ACE по формуле Герона:

$$p = (AC + CE + AE) : 2 = (14 + 8 + 10) : 2 = 16 \text{ см.}$$

$$S = \sqrt{16(16 - 10)(16 - 8)(16 - 14)} = \sqrt{16 * 2 * 3 * 2 * 4 * 2} = 16\sqrt{6}$$

5) Найдем площадь трапеции:

Треугольники ABC и CED имеют одинаковую площадь, т.к. их площади равны половине произведения высоты трапеции на равные стороны BC и DE.

Тогда площадь трапеции равна площади треугольника ACE:

$$S_{ABCD} = 16\sqrt{6} \text{ см}^2.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то это:
а) квадрат; б) ромб; в) трапеция; г) прямоугольник; д) параллелограмм.
2. Является ли четырехугольник параллелограммом, если одна пара его противоположных сторон равна, а другая параллельна?
3. В равнобедренной трапеции ABCD с основаниями AB и CD сумма углов A, B, C равна 340° . Найдите все углы трапеции.
4. В параллелограмме ABCD угол A равен 60° , сторона BC равна 10 см, высота CH проведена из вершины C к стороне AD и $CH=14$ см. Найдите периметр параллелограмма.
5. Диагонали ромба относятся как 2:5. Найдите площадь ромба, если его периметр равен 10 см.
6. Площадь прямоугольника равна 54 см^2 . Найдите площадь четырехугольника вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника.
7. В параллелограмме ABCD к сторонам BC и DC проведены высоты из точки A, угол между высотами равен 45° и одна из высот делит сторону DC на отрезки 3 см и 4 см, считая от вершины C. Найдите площадь параллелограмма.
8. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны 12 см и 16 см.
9. Может ли четырехугольник с противоположными наборами сторон a и b, c и d являться трапецией, если да, то найти ее площадь:
а) $a=5 \text{ см}$, $b=4 \text{ см}$, $c=6 \text{ см}$, $d=3 \text{ см}$; б) $a=3 \text{ см}$, $b=4 \text{ см}$, $c=5 \text{ см}$, $d=3 \text{ см}$.
10. Площадь трапеции ABCD равна 100 см^2 . Из середины стороны AB к стороне CD проведен перпендикуляр, который равен 16 см. Найдите боковую сторону CD.