

BAB III

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TINGKAT SATU NON HOMOGEN

A. PD Liner Tingkat Satu Nonhomogen

Persamaan PDB linear tingkat satu non homogen dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[yP(x) - Q(x)] dx + dy = 0$$

sehingga

$$M(x, y) = yP(x) - Q(x) \quad \text{dan} \quad N(x, y) = 1$$

sekarang

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$$

dengan demikian persamaan ini bukan PD eksak, sehingga perlu dilakukan faktor integrasi. Faktor integrasi dipilih tergantung pada x , yaitu $\mu(x)$ sedemikian sehingga :

$$(x)(yP(x) - Q(x))dx + (x)dy = 0$$

merupakan persamaan eksak yang berakibatkan bahwa $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$$\frac{\partial((x)(yP(x) - Q(x)))}{\partial y} = \frac{\partial((x))}{\partial x}$$

$$P(x)dx = \frac{\partial((x))}{(x)} \int P(x)dx = \int \frac{\partial((x))}{(x)}$$

sehingga

$$\ln \ln \mu = \int P(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} ; \quad \mu > 0$$

Kemudian kalikan μ dengan persamaan (1) diperoleh :

$$e^{\int P(x)dx} \left(\frac{dy}{dx} + yP(x) \right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + ye^{\int P(x)dx} P(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

yang mana hal ini sama dengan

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{\int P(x)dx} \right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

atau

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

atau



disebut persamaan Bernaulli

Selanjutnya persamaan yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x) \quad \dots\dots\dots (2)$$

persamaan (2) setara)

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{-n} P(x) = Q(x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

Misalkan $v = y^{1-n}$, $\frac{dv}{dy} = (1 - n)y^{-n}$

Sehingga

$$\frac{dy}{dv} = \frac{y^n}{1-n} \frac{dv}{dx}$$

(3) menjadi

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v = (1 - n)Q(x)$$

misalkan $P_p(x) = (1 - n)P(x)$ dan $Q_q(x) = (1 - n)Q(x)$ sehingga persamaan (3)

di atas dapat direduksi ke dalam bentuk

$$\frac{dv}{dx} + vP_p(x) = Q_q(x)$$

.....

adalah persamaan(1), sehingga teknik penyelesaiannya sama.

Contoh 1. Selesaikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = 2 + x$; $y(0) = 2$

Penyelesaian 1 :

Diketahui $P(x) = \frac{1}{2}$; $Q(x) = 2 + x$

Faktor Integrasi :

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2}dx} = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \int e^{\frac{1}{2}x} (2 + x)dx + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\int 2e^{x/2} dx + \int xe^{x/2} dx + C \right)$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(4e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C \right)$$

$$y = 2x - Ce^{\frac{x}{2}} \quad \blacksquare$$

merupakan penyelesaian umum.

Penyelesaian partikular (khusus) persamaan difeensial : untuk $y(0) = 2$

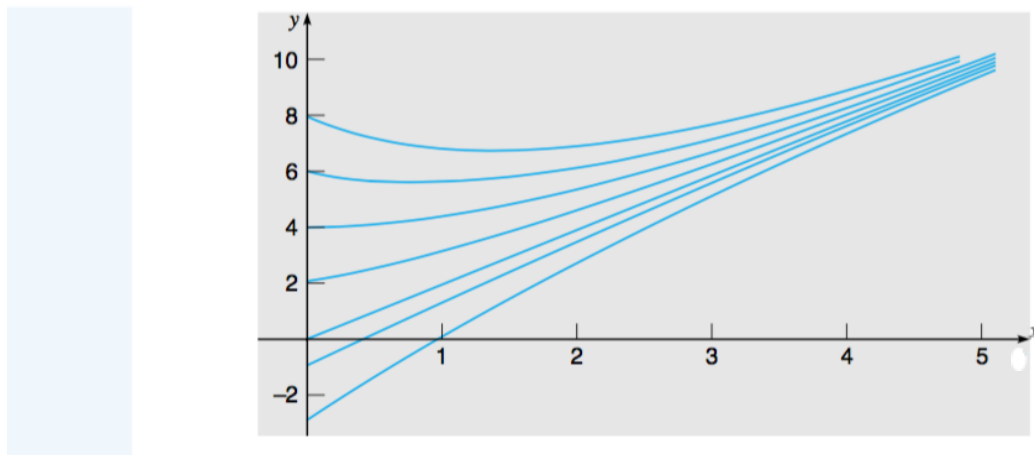
$$y = 2x - Ce^{\frac{x}{2}}$$

$$2 = 2(0) - Ce^{\frac{0}{2}} = 0 - C$$

$$c = -2$$

$$y = 2x + 2e^{\frac{x}{2}}$$

Jika di gambar grafik fungsi dari sebagai berikut :



Gambar 1. Kurva integral $y' + \frac{1}{2}y = 2 + x$

Contoh 2. Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 4 - x \quad ; y(0) = -2$$

Penyelesaian 2 :

Diketahui bahwa $P(x) = -2$; $Q(x) = 4 - x$

Faktor Integrasi :

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

Kemudian substitusikan ke bentuk persamaan dibawah ini :

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C \right)$$

$$y = e^{-(-2x)} \int e^{-2x}(4 - x)dx + C$$

$$y = e^{2x} \left(\int 4e^{-2x} dx - \int xe^{-2x} dx + C \right)$$

$$y = e^{2x} \left(-2e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C \right)$$

$$y = -2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{2x}$$

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + Ce^{2x} \quad \blacksquare$$

merupakan penyelesaian umum.

Penyelesaian partikular (khusus) untuk $y(0) = 2$

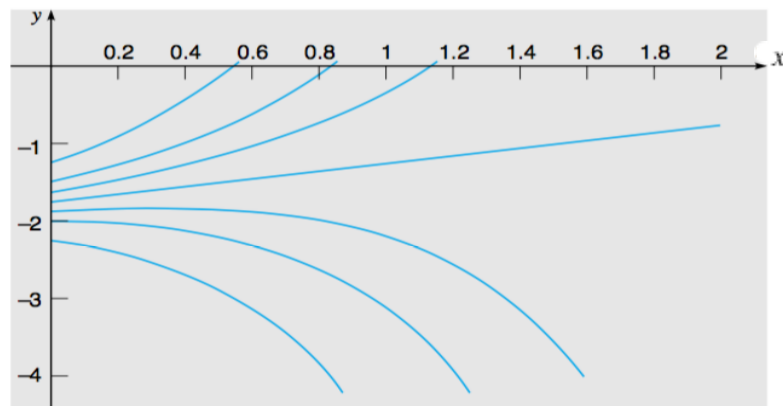
$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + Ce^{2x}$$

$$2 = -\frac{7}{4} + 0 + C$$

$$C = \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}e^{2x} \quad \blacksquare$$

Merupakan penyelesaian partikular persamaan diferensial :



Gambar 2. Kurva Integral $y' - 2y = 4 - x$

Contoh 3. Carikan penyelesaian umum dari PD $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

Penyelesaian 3: diketahui : $P(x) = 2x$; $Q(x) = 4x$

Maka faktor integral (FI) $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

Sekarang gunakan rumus

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C \right)$$

$$y = e^{-x^2} \int e^{x^2} (4x) dx + C$$

$$y = e^{-x^2} \left(\int 4x e^{x^2} dx + C \right)$$

$$y = e^{-x^2} (2e^{x^2} + C)$$

$$y = 2 + C e^{-x^2} \quad \blacksquare$$

merupakan penyelesaian umum.

Contoh 4. Selesaikan penyelesaian umum dari PD $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

Penyelesaian 4:

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

Transformasikan :

$$v = y^{-4}$$

Diturunkan terhadap y, diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dy} &= -4y^{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{1}{4}y^5 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{4}y^5 \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

Persamaan (1) dikalikan dengan $\frac{1}{y^5}$, di peroleh :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^5} \left(\frac{dy}{dx} - y \right) &= \frac{1}{y^5} (xy^5) \\ y^{-5} \left(\frac{dy}{dx} - y \right) &= x \quad \dots\dots\dots (4.3) \end{aligned}$$

Lalu substitusikan ke pers. (2) ke pers. (3), mengubah persamaan menjadi :

$$\begin{aligned} y^{-5} \left(-\frac{1}{4}y^5 \frac{dv}{dx} - y \right) &= x \\ \left(-\frac{1}{4} \frac{dv}{dx} - y^{-4} \right) &= x \\ \left(\frac{dv}{dx} + 4v \right) &= -4x \end{aligned}$$

Persamaan sudah terbentuk menjadi persamaan diferensial linear non homogen.

Diketahui $P(x) = 4$ dan $Q(x) = -4x$

Faktor integrasi $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 4dx} = e^{4x}$

Maka

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$$

$$ve^{4x} = \int e^{4x}(-4x)dx + C$$

$$ve^{4x} = -4 \int xe^{4x}dx + C = -4\left(\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\right) + C$$

$$ve^{4x} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

$$v = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Sekarang v di ganti dengan y^{-4} , Diperoleh :

$$y^{-4} = \frac{1}{4} - x + Ce^{4x} \quad \blacksquare$$

Merupakan PUPD

Contoh 5. Selesaikan $\frac{dy}{dt} + y = 4y^4 e^t$ $y(1) = 2$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dt} + y = 4y^4 e^t \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

Transformasikan $v = y^{-3}$ $\frac{dv}{dy} = -3y^{-4}$; $\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{3}y^4$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{3}y^4 \frac{dv}{dt} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

Pers. (5.2) substitusikan ke pers. (5.1), mengubah persamaan menjadi :

$$-\frac{1}{3}y^4 \frac{dv}{dt} + y = 4y^4 e^t$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) - 3y^{-3} = -\frac{4}{3}e^t$$

$$\frac{dv}{dt} - 3v = -\frac{4}{3}e^t \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

Pers. (5.3) merupakan persamaan diferensial linear non homogen.

Diketahui : $P(t) = -3$ dan $Q(t) = -\frac{4}{3}e^t$

Faktor integrasi

$$\mu = e^{\int P(t)dt} = e^{\int -3dt} = e^{-3t}$$

Maka

$$ve^{\int P(t)dt} = \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + C$$

$$ve^{-3t} = \int e^{-3t} \left(-\frac{4}{3}e^t\right)dt + C$$

$$ve^{-3t} = -\frac{4}{3} \int e^{-2t} dt + C = \frac{2}{3}e^{-2t} + C$$

$$v = \frac{2}{3}e^t + Ce^{-3t}$$

Sekarang v kita ganti dengan y^{-3}

$$y^{-3} = \frac{2}{3}e^t + Ce^{-3t} \quad \blacksquare$$

Ini merupakan penyelesaian umum yang diminta

Penyelesaian khusus jika $y(1) = 2$

$$y^{-3} = \frac{2}{3}e^t + Ce^{-3t}$$

$$(2)^{-3} = \frac{2}{3}e^1 + Ce^{-3(1)}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{2e}{3} + \frac{C}{e^3}$$

$$C = \left(\frac{1}{8} - \frac{2e}{3}\right)e^3 = \frac{e^3}{8} - \frac{2e^4}{3}$$

Penyelesaian khusus PPPD :

$$y^{-3} = \frac{2}{3}e^t + \left(\frac{e^3}{8} - \frac{2e^4}{3}\right)e^{-3t} \quad \blacksquare$$

B. Metode Lagrange (Metode Variasi Konstanta)

Persamaan diferensial linier tingkat satu:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \dots\dots\dots (5)$$

Penyelesaian umum dari PD persamaan (5) dapat diikuti langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1:

Perhatikan bentuk PD linear tingkat satu homogen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Persamaan (6) ini disebut persamaan tereduksi, dan merupakan persamaan diferensial linier tingkat satu, dimana perubahnya mudah dipisahkan. Penyelesaian persamaan (6) disebut penyelesaian tereduksi, yaitu:

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

Bila diintegralkan didapat:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx = C_1$$

$$\ln y + \int P(x)dx = \ln C_1$$

$$\ln y - \ln C_1 = \int -P(x)dx$$

$$\ln \frac{y}{C_1} = \int -P(x)dx$$

$$y = C_1 e^{\int -P(x)dx} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Persamaan (7) merupakan penyelesaian umum dari persamaan (5) yang disebut penyelesaian tereduksi, sedang C_1 adalah konstanta sembarang.

Langkah 2:

Pandang C_1 sebagai fungsi dari x , dan akan dicari C_1 sehingga persamaan (6) merupakan penyelesaian persamaan (5).

Untuk mencari C_1 , persamaan (7) didiferensiir ke- x , didapat:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\ln \ln y + \int P(x) dx \right) &= \frac{d}{dx} (\ln \ln C_1) \\ \frac{1}{y} dy + P(x) dx &= \frac{1}{C_1} \frac{dC_1}{dx} \\ \frac{dy}{dx} + P(x)y &= y \frac{1}{C_1} \frac{dC_1}{dx} \quad \dots\dots\dots (8)\end{aligned}$$

Ruas kiri persamaan (8) sama dengan ruas kiri persamaan (4), maka:

$$\frac{y}{C_1} \frac{dC_1}{dx} = Q(x)$$

Bila y diganti dengan persamaan (6) didapat:

$$\begin{aligned}\frac{C_1 e^{\int -P(x) dx}}{C_1} \frac{dC_1}{dx} &= Q(x) \\ e^{-\int P(x) dx} dC_1 &= \int Q(x) dx \\ \int dC_1 &= \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx\end{aligned}$$

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

C₁ dari persamaan (9) inilah yang memenuhi persamaan (5) sehingga didapat:

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2 \right) e^{-\int P(x) dx}$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan diferensial Bernaulli adalah:



Jadi disimpulkan bahwa metode bernaulli dan metode langrange dapat mencari penyelesaian umum dari persamaan diferensial linier tingkat satu.

Contoh 6. Tentukan penyelesaian umum pada contoh 1 : $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = 2 + x$

Penyelesaian 6. Dimana $P(x) = \frac{1}{2}$ dan $Q(x) = 2 + x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = 2 + x \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

pers.(6.1) diubah menjadi persamaan diferensial homogen

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{2}dx = 0$$

$$\ln \ln y + \frac{1}{2}x = C_1$$

$$\ln \ln y + \ln \ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln \ln C_1$$

$$\ln \ln y = \ln \ln C_1 - \ln e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \quad \dots\dots\dots(6.2)$$

Lalu pers. (6.2) diturunkan terhadap x , diperoleh :

$$\frac{1}{y}dy + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{C_1}dC_1$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{y}{C_1} \frac{dC_1}{dx}$$

$$Q(x) = \frac{y}{C_1} \frac{dC_1}{dx}$$

$$2 + x = e^{-\frac{1}{2}x} \frac{dC_1}{dx}$$

$$e^{\frac{1}{2}x} (2 + x)dx = dC_1$$

$$\int \left(2e^{\frac{1}{2}x} + xe^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \int dC_1$$

$$4e^{\frac{1}{2}x} + 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + C_2 = C_1$$

$$2xe^{\frac{1}{2}x} + C_2 = y e^{\frac{x}{2}}$$

$$y = 2x - C e^{-\frac{x}{2}} \quad \blacksquare$$

Merupakan penyelesaian persamaan diferensial linear non homogen :

Contoh 7. Selesaikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} + y \cotan x = \cos \cos x$

Penyelesaian 7.

$$\frac{dy}{dx} + y \cotan x = \cos \cos x \quad \dots\dots (7.1)$$

Pers(7.1) dibentuk menjadi persamaan Homogen diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} + y \cotan x = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \cotan x \, dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \cotan x \, dx = C_1$$

$$\ln \ln y + \ln \ln \sin x = \ln \ln C_1 \quad \dots\dots (7.2)$$

$$C_1 = y \sin x \quad \dots\dots (7.3)$$

Pers. (7.3) diturunkan terhadap x , diperoleh:

$$dC_1 = \sin x \, dy + y \cos x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} + (\cotan x) y = \frac{dC_1}{\sin x \, dx}$$

$$Q(x) = \frac{dC_1}{\sin x \, dx}$$

$$\cos x \sin x = \frac{dC_1}{dx}$$

$$dx = dC_1$$

$$dx = \int dC_1$$

$$\frac{1}{2}x + C_2 = C_1$$

Jika $C_1 = \sin x$, substitusikan ke pers. (7.2), diperoleh penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{1}{2}x + C_2 = y \sin x$$

$$C_2 = y \sin x - \frac{1}{2}x$$

$$y \sin x - \frac{1}{2}x = C_2 = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \sin x + \frac{C}{\sin \sin x}$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \sin x + C \operatorname{cosec} x \quad \blacksquare$$

Contoh 8. Dengan metode integrase (bernaulli) tunjukkan bahwa persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + y \cotan x = \cos \cos x \quad \text{adalah } y = \frac{1}{2} \sin \sin x + C \operatorname{cosec} x$$

Penyelesaian 8 : Soal ini akan diselesaikan dengan metode faktor integrasi

$$\text{Diketahui bahwa } P(x) = \cotan x \quad \text{dan } Q(x) = \cos \cos x$$

Faktor integrasi

$$v = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \cotan x dx} = \sin \sin x$$

PUPD :

$$ye^{\int P(x) dx} = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

$$y \sin x = \int \sin x \cos x dx + C_1$$

$$y \sin \sin x = \frac{1}{2} x + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \sin x + C \operatorname{cosec} x \quad \blacksquare$$

Penyelesaian yang dicari.

dapat disimpulkan bahwa cara faktor integrasi sama hasilnya dengan metode langrange.

Anda dapat menggunakan salah satu metode (cara) di atas untuk menyelesaikan persamaan PD tingkat satu linear non homogen.

D. Soal-Soal Latihan

Carilah penyelesaian umum dan penyelesaian khusus, jika ada dari PD :

$$1. \text{ Selesaikan PD ; } y' + \frac{y}{x} = y^{-2}(x^4 + 4)$$

2. Selesaikan PD : $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$
3. Selesaikan PD : $y' + y = y^2 (\cos \cos x - \sin \sin x)$
4. Selesaikan PD : $\frac{dy}{dx} + y \tan \tan x = y^3 \sec \sec x$
5. Selesaikan PD : $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{2y} + \frac{1}{2}x^3 \cos \cos y = 0$
6. Selesaikan PD : $\frac{dy}{dx} + xy = y^3 x^3$
7. Selesaikan PD : $xy' + 2 = x^3(y - 1)$: jika $y = 0$ untuk $x = 1$
8. Selesaikan PD : $y' + y = 12y^2 e^{2x}$; jika $y = 1$ untuk $x = a$
9. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$y - \frac{dy}{dx} \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$$

10. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$3x dy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) dx$$

11. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2} y = x y^4 \arcsin x$$

12. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} \sin x - y = y^4 (1 + \cos x)$$

13. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} - y \tan 3x = -y^4 (1 + 3x \operatorname{tg} 3x + 3 \sec 3x)$$

yang memenuhi syarat untuk $x = 0$ terdapat $y = \frac{1}{2}$

14. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{(x^2 - 1)dy}{dx} + x(y - 2\sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

15. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin 2x \quad ; \text{ yang memenuhi syarat, untuk } x = 0 \text{ maka}$$

$$y = 0$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Nugroho Didit Budi, 2011., “Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya”Edisi pertama. Cetakan pertama, Graha Ilmu. Yogyakarta.
2. Finizio N., G Ladas. 1988., Widiarti Santoso ., ”Persamaan diferensial biasa dengan Penerapan Modern.,Edisi kedua. Terjemahaan , Erlangga. Jakarta
3. Ayres Frank, JR and J.C.Ault., 1992.,”Persamaan Diferensial.”Cetakan ketiga. Arilangga Jakarta.
4. Soehardjo.,1972.,”Persamaan Diferensial”. Diktat. ITS. Surabaya
5. Soemartojo Noeniek,1987.,:Kalkulus Lanjut”, Cetakan pertama. Universitas Indonesia (UI Press). Jakarta
6. Boyce William E. and, Richard C. 2000.,“ Elementary differential equations and boundary value problems”, Sevent Edition. DiPrima.Troy Newyork.