

國立高師大附中108學年度第二學期高三自然組數學科(仁~信)第一次段考試題卷

- 1、 單一選擇題：10分(每題有 5 個選項，其中只有一個是正確的選項，各題答對者，得 5 分；答錯或未作答，該題以零分計算。)

1. 試求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} \right)$ 之值為 (1)2 (2)0 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5)不存在。

2. 設 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x^2 + 3$, 若 $h(f(x)) = g(x + 1)$, 則 $h(x) =$ (1) $3x^2 + 3x + 1$

(2) $\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 13)$ (3) $\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 6)$ (4) $x^2 + 3x + 3$ (5) $x^2 + 3$ 。

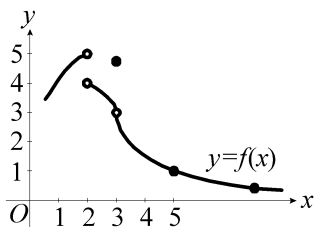
- 2、 多重選擇題：24分(每題有5個選項，其中至少有1個是正確的選項的，所有選項均答對者，得6分；答錯1個選項者，得4分；答錯2個選項者，得2分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。本大題共4題，共計24分)

1. 下列哪些敘述正確？ (1) 設 $a_n = 2^n$, $b_n = (0.99)^n$, $c_n = (1.01)^n$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{1 + 2a_n} + \frac{3b_n}{11 - 6b_n} + \frac{4c_n}{1 - 8c_n} \right) = 0$

(2) $0.23\bar{9} < 0.24$ (3) $1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \cdots + \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} + \cdots = \frac{3}{7}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ 為發散級數

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ 為收斂級數。

2. 設 $f(x)$ 之圖形如下，則下列哪些正確？ (1) $f(2)$ 不存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 不存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$
(4) $f(x)$ 在 $x = 3$ 點連續 (5) $f(x)$ 在 $x = 5$ 點連續



3. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{|x|} \right)^2$ 存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{x}{|x|}$ 存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) \frac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^2$ 存在

4. 下列哪些選項的極限值正確？ (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}$ 不存在

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{1 + n^2} = \frac{1}{2}$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{1 + n^2} = 1$ 。

~背面有題~

- 3、 填充題：每格5分，共60分

A. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^n}{3^n + 4^{n-1}} =$ _____。

B. 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|5+x-x^2|-1}{x-3} =$ _____。

C. 設 $f\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) = \frac{4x-1}{2x+3}$ ，求 $f(1) =$ _____。

D. 試求函數 $f(x) = \sqrt{2 - |x - 5|}$ 之值域為 _____。(以集合{ }表示)

E. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(2n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right) =$ _____。

F. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3} =$ _____。

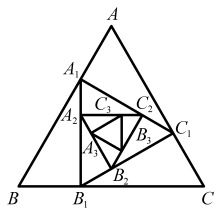
G. 設 $f(x)$ 為三次多項函數且 x^3 的係數為 1，若 $a > 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = -2$ ， $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)}{x+a} = 6$ ，則 $f(3) =$ _____。

H. 函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{1}{6}, & x = 1 \end{cases}$ ，其中 a, b 是異於 0 的常數，若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處連續，則數對 $(a, b) =$ _____。(全對才給分)

I. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3}{5} + \frac{2^2+3^2}{5^2} + \cdots + \frac{2^n+3^n}{5^n} \right) =$ _____。

J. 一盒子裡有 n ($n > 5$) 顆有大小相同的球，其中有 2 顆紅球、3 顆藍球以及 $n - 5$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、 n 分及 3 分。若所得分數的期望值為 E_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n =$ _____。

K. 如圖，設正三角形 ABC 之一邊長為 6 公分，今依 $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ 之順序將各邊分為 1:3 之點命名為 A_1, B_1, C_1 ；其次依 $\overline{A_1B_1}$ ， $\overline{B_1C_1}$ ， $\overline{C_1A_1}$ 之順序將三角形 $A_1B_1C_1$ 之各邊分為 1:3 之點命名為 A_2, B_2, C_2 ；再次這樣，將三角形 $A_2B_2C_2$ 之各邊分為 1:3 之點命名為 A_3, B_3, C_3 ，重複相同的作法繼續下去，則 $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \dots$ 等三角形之面積總和為 _____ 平方公分。



L. 設 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} + 1$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

四、證明題：共 6 分

1. 試利用數學歸納法，證明對所有的正整數 n ， $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ 恆成立

~試題結束~

國立高師大附中108學年度第二學期高三自然組數學科(仁~信)第一次段考

答案卷

班級:_____ 座號:_____ 姓名:_____

- 1、 單一選擇題：10分(每題有 5 個選項，其中只有一個是正確的選項，各題答對者，得 5 分；答錯或未作答，該題以零分計算。)

1	2
3	2

- 二、多重選擇題：24分(每題有5個選項，其中至少有1個是正確的選項，每題的所有選項均答對者，得6分；答錯1個選項者，得4分；答錯2個選項者，得2分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。本大題共4題，共計24分)

1	2	3	4
14	125	125	234

- 三、填充題：每格5分，共60分

A	B	C	D	E	F
4	5	9	$\{0 \leq f(x) \leq \sqrt{2}\}$	2	$\frac{1}{3}$
G	H	I	J	K	L
8	(8,3)	$\frac{13}{6}$	30	$16\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$

- 四、證明題：共6分

- 1.試利用數學歸納法，證明對所有的正整數 n ， $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ 恆成立