

ESTUDIANTE: _____ CURSO: 10° _____ FECHA: _____

OBJETIVO: Reconocer los sistemas de medición de ángulo y las razones trigonométricas en función de resolver triángulos, posibilitando la solución de situaciones problemáticas.

DBA:

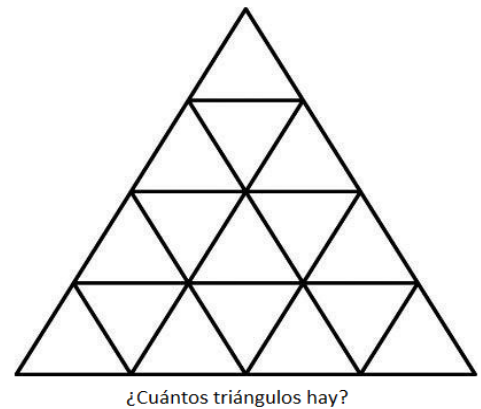
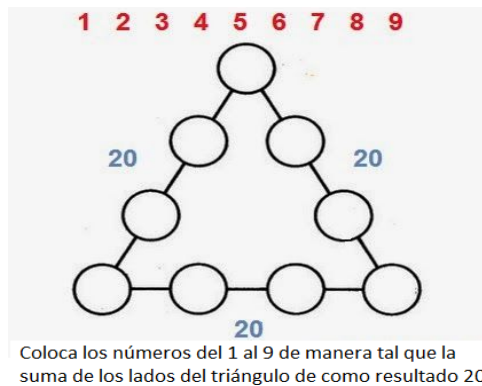
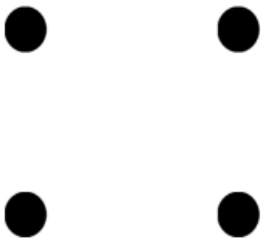
- Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

INDICADOR(ES):

- Reconocer los sistemas de medición de ángulos y realizar conversiones entre ellos.
- Comprender las razones trigonométricas y las propiedades de los triángulos y utilizar tal conocimiento en la resolución de problemas.

1. MOTIVACIÓN. Analiza y resuelve.

Construye un triángulo trazando tres líneas que toquen los cuatro puntos.

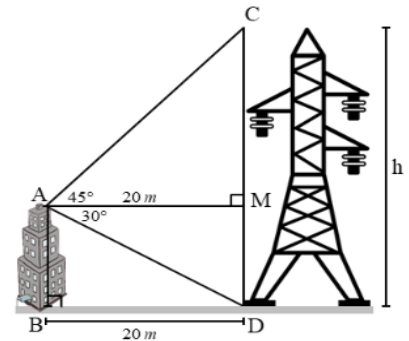


2. SITUACIÓN PROBLÉMICA

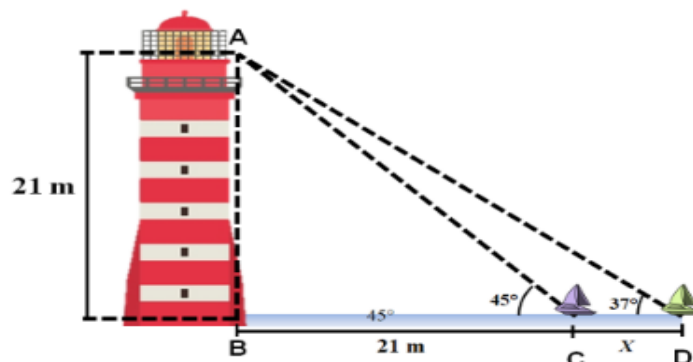
Lee y analiza las siguientes situaciones:

a) Desde la azotea de un edificio, Sara observa la parte más alta y la parte más baja de una torre, tal como se muestra en la figura.

Si Sara se encuentra a una distancia de 20 m de la torre, ¿cuál es la altura de la torre?



b) Carol observa dos barcos desde la parte superior de un faro y quiere hallar cuál es la distancia que hay entre estos barcos.



3. LECTURA (lee y analiza).

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos que consideraban al cielo como el interior de una esfera, de modo que resultó natural estudiar primero los triángulos sobre una esfera (por Menélao de Alejandría, año 100 antes de nuestra era) y que los triángulos en el plano fueran estudiados mucho después. Así el origen de los estudios de la trigonometría debe buscarse en tiempos muy anteriores a nuestra era, donde muchos hombres estudiaron primero la esfera celeste, en el cual se suponía que se desplazaban el Sol, la Luna y las estrellas y cuya posición se calculaba mediante la medición de ángulos. Los dos hombres famosos que se interesaron más por esos estudios fueron los astrónomos griegos Hiparco de Nicea (Siglo II antes de nuestra era) y Claudio Ptolomeo (Siglo II después nuestra era).

El origen del termino seno lo podemos ubicar por el año 500 (de nuestra era), los matemáticos de la India empezaron a estudiar el movimiento de una recta que gira en sentido contrario a las de las manecillas del reloj, alrededor de un punto fijo, y al medir las longitudes de las semicuerdas éstas se les asoció al ángulo originado por el giro de la recta (véase figura 1)

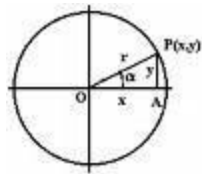


Figura 1

Los hindúes dieron el nombre de jva a dicha semicuerda, nombre que en hindú significa cuerda. La palabra pasó al árabe como jiba y más tarde se confundió con la palabra árabe jaib debido probablemente a que las palabras árabes se escribían sin vocales y por ser iguales las consonantes de ambas jiba y jaib, es decir jb. Sin embargo la palabra jaib no tiene relación alguna con la longitud de la semicuerda ya que en árabe significa la abertura en el cuello de una prenda de vestir. Pese a ello los árabes se acostumbraron a llamar a la semicuerda como jaib, palabra que tiene más relación con curva o doblez. Por ese tiempo los matemáticos europeos se familiarizaron con la palabra árabe referente a semicuerda y tradujeron la palabra jaib por la palabra sinus que significa doblez o curva. Entonces, dicho error se ha perpetuado en nuestra palabra seno. Así pues originalmente el seno de un ángulo representaba la longitud de una semicuerda de una circunferencia de radio uno.

Desde antes de nuestra era el hombre se interesó por la relación entre la longitud de un objeto vertical y la longitud de la respectiva sombra que proyectaba (ver figura 2).

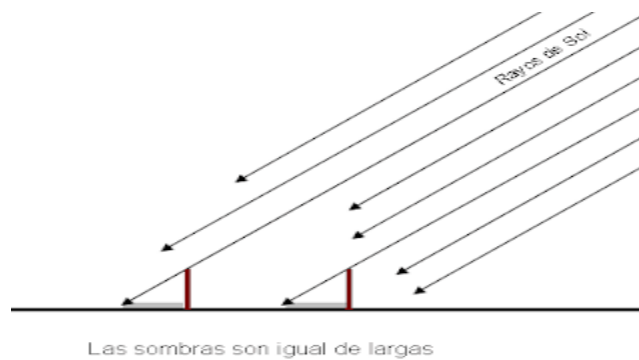


Figura 2

En gnomónica se denomina *Umbra versa* a la sombra que arroja un ortostilo sobre una pared, similarmente se denomina a la razón entre la longitud de la sombra y la longitud del ortostilo que la genera. El concepto se opone a *umbra recta* (sombra arrojada sobre una superficie horizontal por un ortostilo). Está muy relacionado con el concepto de cotangente y antiguamente era calculado con una tabla especial adosada al astrolabio que a veces se denominaba cuadrante de sombras.

La *umbra versa* está muy relacionada con la historia de la trigonometría ya que las primeras tablas de tangentes estaban en las partes traseras de los astrolabios árabes en los años 860 y usaban indistintamente los conceptos de *umbra recta* y *umbra versa*. Viète usó los términos posteriormente como *amsinus* y *prosinus*. El nombre de tangente fue usado por primera vez por Thomas Fincke en 1583. El término cotangente fue usado por primera vez por Edmund Gunter en 1620. Además, en la historia, el origen del término tangente se asocia a la recta tangente a una circunferencia que como sabemos es aquella recta que intersecta a la circunferencia en tan sólo un punto, ahora bien la palabra tangente se asocia a l termino en latín tongo que significa toco. En el siglo XVI los matemáticos empezaron a designar a CB (ver figura 3) como la tangente del ángulo COB.

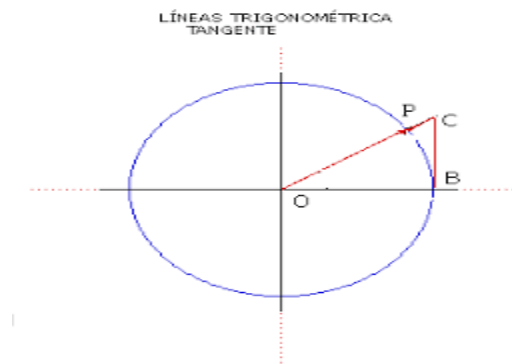


Figura 3

El primer libro que tiene un tratamiento sistemático de trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasir Eddin (alrededor de 1250 antes de n.e.), así se comenzó a considerar a la Trigonometría como ciencia independiente y no como un simple capítulo de la Astronomía; Regio Montano (1436-1476) es el autor principal a quien se debe el traslado de la Trigonometría astronómica a las matemáticas; Regimontano o Johan Miller fue autor de la obra *De Triangulis Omnimodes libri quinqué*, en esta obra contiene tablas de senos y de tangentes, es considerado como autor de la trigonometría moderna. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por el alumno de Copernico, Rhaeticus(1514-1576). La obra de Rhaeticus fue la primera en definir las seis funciones trigonométricas como razones entre lados de triángulos, aunque no le dio a las razones trigonométricas sus nombres actuales. El crédito de esto se lo lleva Thomas Fincke (1583), pero en su época esa notación no fue aceptada universalmente. Las notaciones quedaron establecidas a partir de los libros de texto de Leonardo Euler (1707-1783) que sentó las bases del análisis matemático avanzado al generalizar su fórmula para que conectase las funciones exponenciales y las trigonométricas. Con ello también desarrolló el cálculo complejo.

Resuelve:

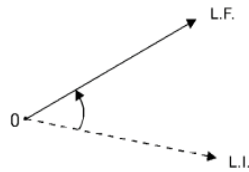
- ¿A qué época y cultura se remontan los orígenes de la trigonometría?
- ¿En la antigüedad, a qué hace referencia la esfera celeste?
- ¿A qué época y cultura se remontan los orígenes del término seno?
- ¿Cuándo y por qué motivo se consideró a la trigonometría como ciencia independiente?
- ¿Cuáles fueron los aportes de Copérnico y Euler a la trigonometría?
- Elabora una línea de tiempo que evidencie la historia de la trigonometría.

4. CONCEPTUALIZACIÓN (consignar):

Sistemas de Medición Angular

Ángulo Trigonométrico:

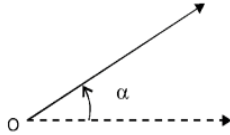
Es una figura generada por la rotación de un rayo, alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.



Convención

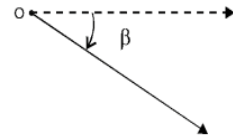
Ángulos Positivos:

Si el rayo gira en sentido antihorario.



Ángulos Negativos:

Si el rayo gira en sentido horario.



Los ángulos trigonométricos pueden ser de cualquier magnitud, ya que su rayo puede girar infinitas vueltas, en cualquiera de los sentidos.

Así por ejemplo en la figura (1), el ángulo trigonométrico mide "3 vueltas", en la figura (2) el ángulo trigonométrico mide "-2 vueltas".

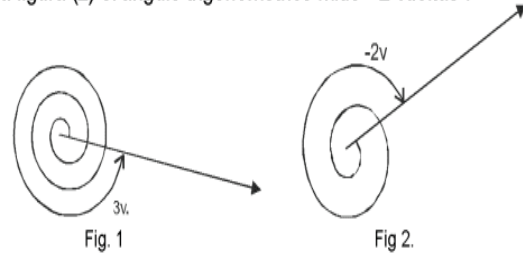


Fig. 1

Fig. 2

Medición de ángulos

Así como para medir segmentos se requiere de una unidad de longitud determinada (metros, pulgadas, etc.), para medir ángulos se necesita de otro ángulo como unidad de medición.

Sistema Sexagesimal (Inglés)

Su unidad angular es el "grado sexagesimal" (1°), el cual es equivalente a la 360 ava parte del ángulo de una vuelta.

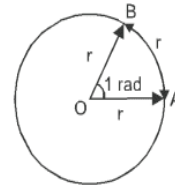
$$1^\circ = \frac{1v}{360} \quad \text{y} \quad 1v = 360^\circ$$

Equivalencias

$1^\circ = 60'$	$1' = 60''$	$1^\circ = 3600''$
-----------------	-------------	--------------------

Sistema Radial o Circular (Internacional)

Su unidad es el "radián", el cual es un ángulo central que subtiende un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.



$$m \angle AOB = 1 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{1v}{2\pi} \quad \text{y} \quad 1v = 2\pi \text{ rad} \approx 6,2832 \text{ rad}$$

Nota:

Como:

$$\pi = 3,141592653...$$

Entonces:

$$\pi \approx 3,1416 \approx \frac{22}{7} \approx \sqrt{10} \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

TIPOS DE TRIÁNGULOS

Conversión de grados a radianes y viceversa

- Para convertir radianes a grados, se multiplica por

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ radianes}}$$

- Para convertir grados a radianes, se multiplica por

$$\frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ}$$

- Fórmula de la longitud de un arco (en radianes)

$$s = r\theta$$

SEGÚN LA LONGITUD DE SUS LADOS:



EQUILÁTERO

3 lados iguales



ISÓSCELES

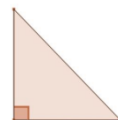
2 lados iguales



ESCALENO

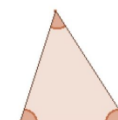
ningún lado igual

SEGÚN SUS ÁNGULOS:



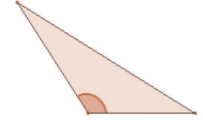
RECTÁNGULO

1 ángulo recto



ACUTÁNGULO

3 ángulos agudos



OBTUSÁNGULO

1 ángulo obtuso

Propiedades de los triángulos

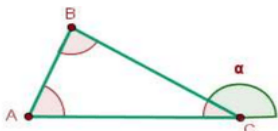
1 Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

$$a < b + c$$

$$a > b - c$$

2 La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .

$$A + B + C = 180^\circ$$

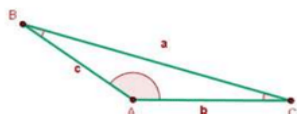


3 El valor de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

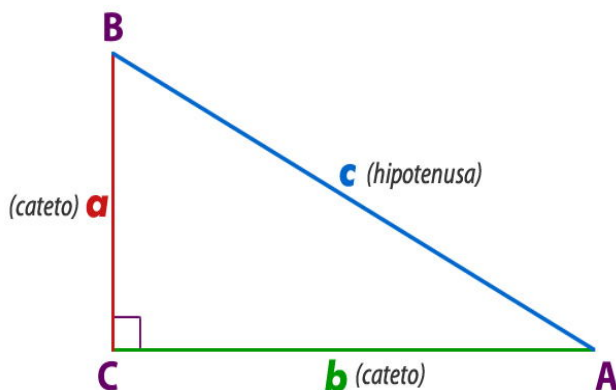
$$\alpha = A + B$$

$$\alpha = 180^\circ - C$$

4 En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.



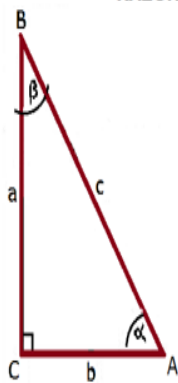
TEOREMA DE PITÁGORAS



$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}^2 + \text{Cateto}^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



$$\text{Seno de } \alpha = \sin \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

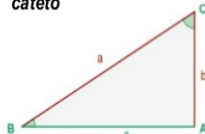
$$\text{Secante de } \alpha = \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar la longitud de sus lados, la medida de sus ángulos agudos y el área. Es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo agudo internos. Con base en estas condiciones se presentan cuatro casos en la resolución de triángulos.

1. Se conocen la hipotenusa y un cateto



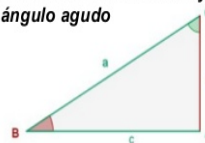
3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo



2. Se conocen los dos catetos



4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo



5. MODELACIÓN

Observa y analiza los siguientes ejemplos.

□ Conversión de grados decimales a grados, minutos y segundos y viceversa.

$$37,42^\circ$$

$$37^\circ 25' 12''$$

$$37,42^\circ$$

$$12'' : 60 = 0,2'$$

$$0,42^\circ \times 60 = 25,2'$$

$$25' + 0,2' = 25,2'$$

$$0,2' \times 60 = 12''$$

$$25,2' : 60 = 0,42^\circ$$

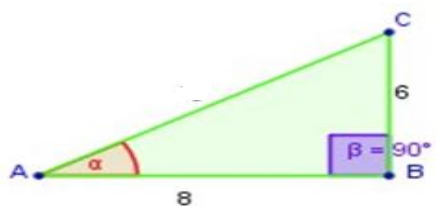
$$37,42^\circ = 37^\circ 25' 12''$$

$$37^\circ + 0,42^\circ = 37,42^\circ$$

$$37^\circ 25' 12'' = 37 + \frac{25}{60} + \frac{12}{3600} = 37 + 0,41\bar{6} + 0,00\bar{3} = 37,42^\circ$$

□ Razones trigonométricas

Halla las razones trigonométricas para alfa (A)



Aplicamos el **Teorema de Pitágoras** y calculamos la hipotenusa, que es $8^2 + 6^2 = 10^2$; o sea, es igual a 10 cm

entonces podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{6}{8} = 0,75..$$

$$\text{cot g } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{8}{6} = 1,33$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25..$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1,66$$

□ Resolución de triángulos

Resolver el siguiente triángulo



$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

$$\hat{C} = 90^\circ$$

Hallamos los lados:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{sen } 54^\circ = \frac{4,8}{c} \rightarrow c = \frac{4,8}{\text{sen } 54^\circ} = 5,93 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow \text{tg } 54^\circ = \frac{4,8}{a} \rightarrow a = \frac{4,8}{\text{tg } 54^\circ} = 3,49 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$a = 3,49 \text{ cm}; \hat{A} = 36^\circ$$

$$b = 4,8 \text{ cm}; \hat{B} = 54^\circ$$

$$c = 5,93 \text{ cm}; \hat{C} = 90^\circ$$

5.1. Actividad

A) Resolver

Pasa las siguientes medidas de grados a radianes:

- a) 45°
- b) 90°
- c) 180°
- d) 270°
- e) 720°
- f) 315°
- g) -30°
- h) 210°
- i) 20°
- j) 100°
- k) 150°
- l) 60°
- m) 50°
- n) 120°
- ñ) 320°
- o) 350°
- p) 280°
- q) 340°

Pasa las siguientes medidas de radianes a grados:

- a) π rad
- b) 3π rad
- c) $\pi/4$ rad
- d) $2\pi/3$ rad
- e) $3\pi/4$ rad
- f) $\pi/6$ rad
- g) $2\pi/5$ rad
- h) $\pi/2$ rad
- i) 2π rad
- j) $3\pi/2$ rad
- k) 8π rad
- l) $\pi/5$ rad
- m) $\pi/9$ rad
- n) $2\pi/9$ rad
- ñ) $3\pi/5$ rad
- o) $\pi/10$ rad
- p) $6\pi/9$ rad
- q) 200π rad

B) Resolver

Convertir a grados decimales:

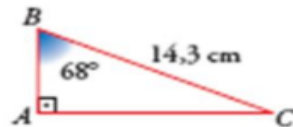
- a) $15^\circ 25' 34''$
- b) $101^\circ 48' 22''$
- c) $77^\circ 3' 12''$
- d) $6^\circ 54' 7''$

Convertir a grados, minutos y segundos:

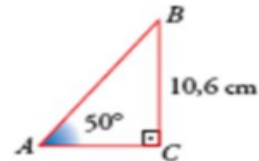
- a) $25,978^\circ$
- b) $65,07854^\circ$
- c) $39,00453^\circ$
- d) $2,26327^\circ$

C) Resolver los siguientes triángulos y hallar las razones trigonométricas, en cada caso, para el ángulo B.

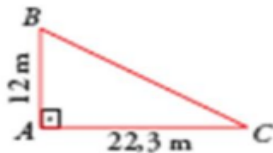
a)



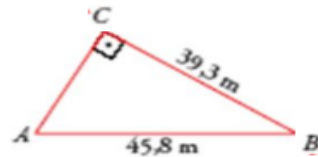
b)



c)

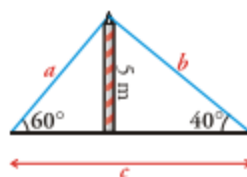


d)

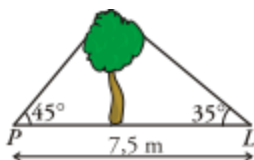


D) Resolver los siguientes problemas:

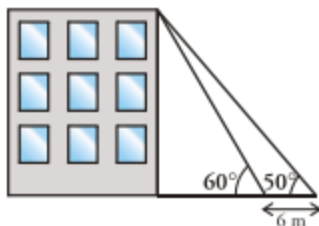
- Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura. Halla el valor de c y la longitud del cable.



- Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura. Calcula la altura del árbol y a qué distancia está Pablo del árbol.



- Desde el suelo vemos el punto más alto de un edificio con un ángulo de 60° . Nos alejamos 6 metros en línea recta y este ángulo es de 50° . ¿Cuál es la altura del edificio?



6. GLOSARIO

Trigonometría: Parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Razón: es un vínculo entre dos magnitudes que son comparables entre sí. Se trata de aquello que resulta cuando una de las magnitudes o cantidades se divide o se resta por otra. Las razones, por lo tanto, pueden expresarse como fracciones o como números decimales.

Hipotenusa: Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Cateto: Lado que junto con otro forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Adyacente: Que está muy próximo o unido a otra cosa.

7. COMPROMISOS

a.	Realiza un ensayo de mínimo dos cuartillas donde expreses tu opinión acerca de la importancia de la trigonometría.
b.	Realiza (en parejas) una diapositiva en la que resumas las temáticas expuestas en la guía.
c.	Elabora 3 ejemplos distintos a los presentados en la guía sobre cada una de las siguientes temáticas: resolución de triángulos rectángulos y problemas que se resuelve aplicando razones trigonométricas. Prepara un vídeo, para enviar al docente, explicando uno de estos ejemplos.