

SERIE 6
(oscillateur mécanique libre)

EX N°1



Un ressort à spires non-jointives de constante de raideur k , est disposé horizontalement. L'une de ses extrémités est fixée à un support et l'autre soudée à un solide de masse $m = 1\text{ kg}$ pouvant se déplacer sur un plan sans frottement.

A l'équilibre, la position du solide coïncide avec l'origine O d'un axe (ox) horizontal dirigé vers la droite. On écarte le solide de sa position d'équilibre d'une quantité $x_0 = 5\text{ cm}$ vers la droite et on l'envoie à $t = 0$ avec une vitesse $v_0 = 0,274\text{ ms}^{-1}$ vers la droite.

1-a- Montrer que le solide se met en mouvement rectiligne sinusoïdal.

-b- Déterminer la constante de raideur k du ressort sachant que le solide effectue **10 oscillations** en **20 secondes**. On prendra $\pi^2 = 10$.

2- Montrer que l'énergie mécanique du système (solide,ressort) reste constante au cours du temps. Déterminer cette constante.

3-a- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C en fonction de x .

b- Pour quel valeur de x cette énergie est-elle maximale ?

c- Quelles sont les positions extrêmes du solide ?

4- Déterminer les expressions en fonction du temps de l'élongation x et de la vitesse v .

5-a- Représenter l'allure de $x = f(t)$

-b- En déduire la distance parcourue par le solide quand il atteint son élongation x maximale pour la deuxième fois.

EX N°2

Un solide S , de masse $m = 100\text{ g}$ est soudé à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives de constante de raideur k et disposé sur un plan horizontal parfaitement lisse.

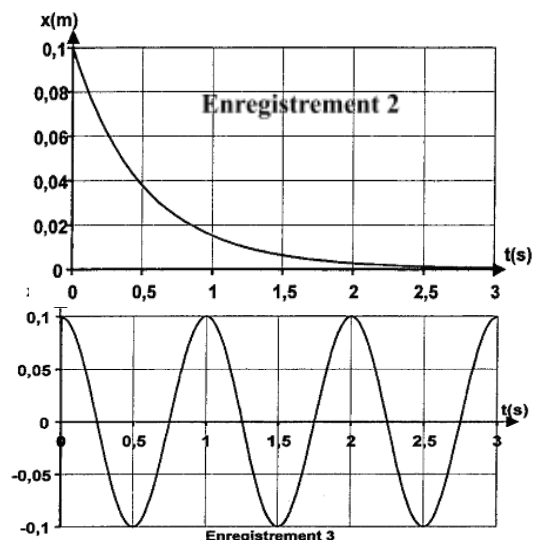
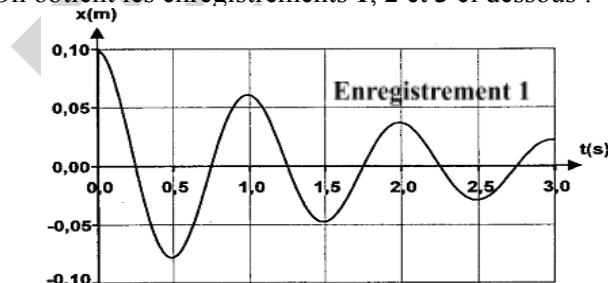
On enregistre la position de son centre d'inertie repérée par son abscisse x dans le repère $(O, \vec{i})$ (voir le schéma n°2 de l'annexe)

A l'équilibre, le centre d'inertie G coïncide avec l'origine O du repère.

On réalise trois enregistrements dans les conditions suivantes:

- les frottements fluides sont négligeables ;
- les frottements fluides sont faibles ;
- les frottements fluides sont importants.

On obtient les enregistrements 1, 2 et 3 ci dessous :



- Indiquer pour chacun des trois enregistrements:
 - la condition (a, b ou c) de fonctionnement ;
 - le régime d'évolution (périodique, pseudo-périodique ou apériodique).

Dans toute la suite on se place dans le cas où les frottements sont négligeables.

2. a) Sur le schéma de l'**annexe**, représenter au centre de gravité G les forces s'exerçant à l'instant t sur le solide S, et les nommer.

b) En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du centre

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

d'inertie G du solide S est:

c) Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme:

$$x = X_m \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi_0 \right).$$

Comment nomme-t-on les constantes X_m et Φ_0 ? Déterminer leurs valeurs sachant que S est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale au point d'abscisse $x = 10,0 \text{ cm}$.

- d) Déterminer la période propre T_0 de l'oscillateur en utilisant l'un des enregistrements précédents et en déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.
3. On étudie maintenant les différentes formes d'énergie du solide dans le cas du régime périodique.

a) Exprimer pour le système {ressort-solide S} à une date t, en fonction de k, m, x et v :

- l'énergie potentielle élastique E_p ;
- l'énergie cinétique E_c .
- l'énergie mécanique E

b) Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du mouvement ? calculer sa valeur à $t = 0$.

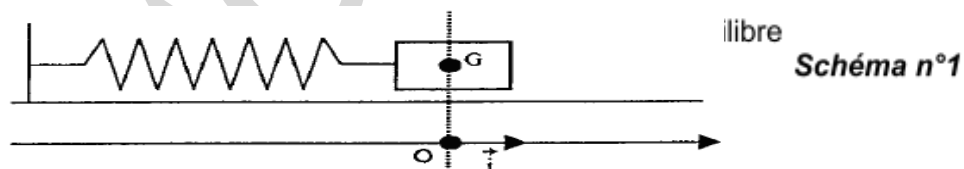
c) Exprimer E_c en fonction de x, k et x_0 . En déduire la position x où la vitesse est maximale et calculer cette valeur maximale.

d) Les figures données sur le **schéma n°3** de l'annexe représentent les variations au cours du temps des différentes énergies E, E_p , E_c .

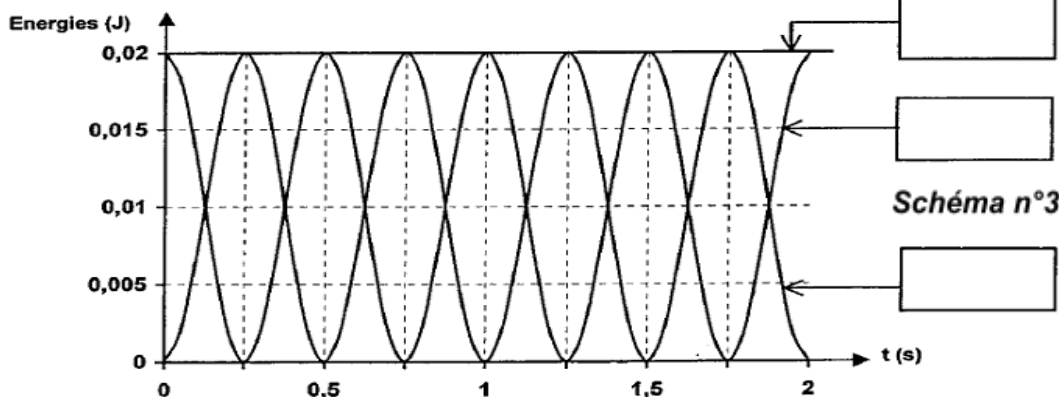
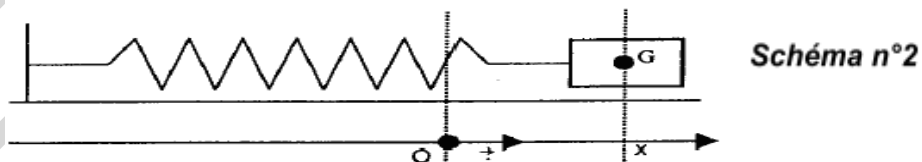
Compléter le schéma en identifiant chacune des courbes. Justifier.

4. a) Préciser les transformations énergétiques entre $t = 0 \text{ s}$ et $t = 0,25 \text{ s}$ puis entre $t = 0,25 \text{ s}$ et $t = 0,5 \text{ s}$.

b) déterminer en utilisant les expressions de $E_c(t)$ et $E_p(t)$ les instants où $E_p = E_c$.



A l'instant t



EX N°3

Un pendule élastique est constitué d'un mobile de masse $m = 80 \text{ g}$ pouvant se déplacer sur un banc à coussin d'air horizontal. Ce mobile est attaché à un point fixe par un ressort de masse négligeable à spires non jointives, de raideur k .

La position du mobile est repérée par l'abscisse x .

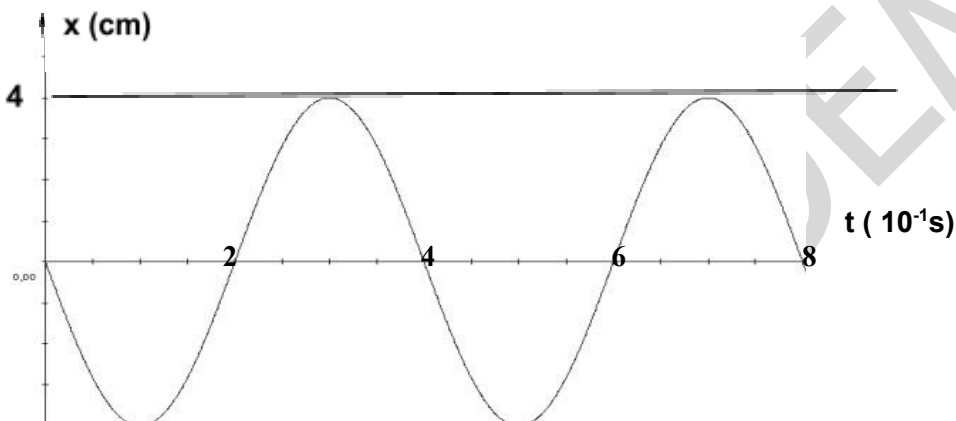
A l'équilibre, la position du centre d'inertie G coïncide avec O , origine des abscisses.

A-Oscillateur libre non amorti : *les forces de frottements sont nulles.*

1) a- Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement du mobile.

b- Montrer que l'expression $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation, on précisera l'expression de ω_0 .

2) Un dispositif approprié permet de tracer la courbe de variation de x en fonction du temps représenté sur le graphe ci-dessous :



- Déterminer la pulsation propre ω_0 et en déduire la raideur k du ressort. (on prendra $\pi^2 = 10$)
- Déterminer l'équation horaire $x(t)$ puis celle de la vitesse $v(t)$.
- Déduire que l'énergie mécanique du système { solide , ressort } se conserve au cours du temps et préciser sa valeur.
- Sous quelle forme se trouve l'énergie mécanique à $t = 0 \text{ s}$ et à $t = 0,1 \text{ s}$.
- Déduire alors la transformation énergétique qui s'est produite entre $t=0\text{s}$ et $t=0,1\text{s}$.

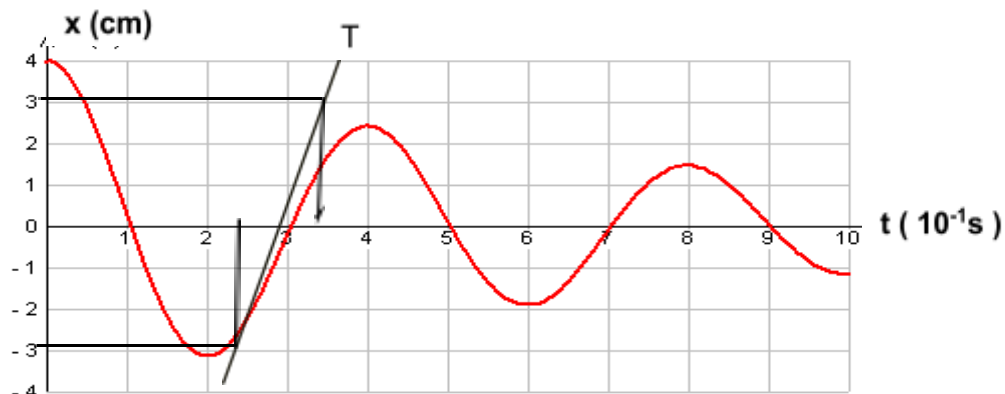
B- Oscillateur libre amorti

Le solide est maintenant soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$

1) a- Que devient l'équation différentielle à laquelle obéit x ?

b- Montrer alors que l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

2) un dispositif approprié permet de tracer la courbe d'évolution temporelle de l'élongation x et sa tangente (T) à $t = 0,3 \text{ s}$:



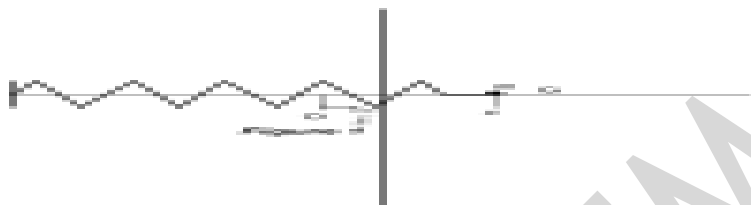
- Sous quelle forme se trouve l'énergie mécanique à $t = 0 \text{ s}$ et à $t = 0,3 \text{ s}$? Justifier la réponse.

b- Calculer l'énergie mécanique dissipée entre $t = 0$ s et $t = 0,3$ s .

EX N°4

On dispose d'un système solide-ressort constitué d'un mobile de masse $m = 250$ g accroché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 10$ N.m⁻¹.

Le mobile assimilé à son centre d'inertie G peut osciller horizontalement sur une tige parallèlement à l'axe Ox (**figure 1**). Le point O coïncide avec la position de G lorsque le ressort est au repos.



I. Dans un premier temps, on néglige les frottements du mobile sur son rail de guidage.

1.a) Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile.

1.b) Reproduire la **figure 1** et représenter les différents vecteurs forces sans souci d'échelle.

2. En appliquant la seconde loi de Newton au mobile, établir l'équation différentielle du mouvement.

$$\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

3. Vérifier que $x = x_M \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ est solution de cette équation différentielle quelles que soient les valeurs des constantes x_M et φ .

4. Le mobile est écarté de sa position d'équilibre et lâché à l'instant $t = 0$ s, sans vitesse initiale, de la position $x_0 = +2,0$ cm.

Déterminer numériquement x_M et φ .

5. Calculer la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ du mouvement.

II. On suppose maintenant que les frottements ne sont plus négligeables et peuvent être modélisés par une force dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse et dont le sens est opposé à celui du

mouvement : $\vec{f} = -\mu \cdot \vec{v}$ ($\mu > 0$).

Un dispositif d'acquisition de données permet de connaître à chaque instant la position du mobile (**figure 2**).

Un logiciel de traitement fournit les courbes de variation, en fonction du temps, de l'énergie mécanique (E_m), de l'énergie cinétique (E_c) et de l'énergie potentielle élastique (E_p) du système solide-ressort (**figure 3**).

1. À l'aide de la **figure 2**, déterminer la pseudo-période T du mouvement. Comparer sa valeur à celle de la période propre calculée au I.5.

2. Identifier par leur lettre (A ou B) les courbes $E_c(t)$ et $E_p(t)$ de la figure 3 en justifiant les réponses.

3. Pourquoi l'énergie mécanique du système diminue-t-elle au cours du temps ?

4. Sur les **figures 2 et 3** de l'annexe sont repérés deux instants particuliers notés t_1 et t_2 .

En utilisant la **figure 2** et en justifiant la réponse, indiquer auquel de ces instants la valeur de la vitesse du mobile est : a) maximale ; b) nulle.

5. Que peut-on en conclure quant à la valeur de la force de frottement à chacun de ces instants ?

6. Justifier alors la forme « en escalier » de la courbe $E_m(t)$ de la **figure 3**.

Figure 2

