

FUNTZIO BATEN puntu baten limitearen kalkulua:

Orain arte funtzio baten limiteak kalkulatzeko bere grafikoa begiratuz egin dugu. Honen helburua limitearen interpretazio grafikoa lantzea izan da.

Baina benetako helburua ez da hori, kasu gehienetan $y=f(x)$ funtzioaren adierazpen analitikoa izango dugu ("ekuazioa") eta grafikoa lortu beharko dugu,

$$y=f(x) \Rightarrow \text{GRAFIKOA}$$

Honetarako funtzioaren limite batzuk kalkulatzeko interesatuko zaigu eta euren bidez lortzen den informazioaz baliatuko gara grafikoen BOZETO bat egiteko.

Gainera, funtzio baten jarraitasuna hausnartzeko, grafikorik gabe, argi dago ikasi beharko dugula kalkulatzeko limiteak funtzioaren adierazpen analitikoekin

Kasu desberdin aurkituko ditugu:

Funtzio baten puntu batean ($x=a$ puntuan) limitea kalkulatzeko x honi "dagokio" y -ren balioaren hurbilketa da ($y=?$)

Limitearen kalkulua BETI hasten da ORDEZKAPENAREKIN, limitearen balioa y -ren balioa izango delako, egotekotan!!!

Ordun, ez ahaztu, **1.urratsa** beti hau izango da.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Segun zer lortzen dugun, metodo bat erabili beharko dugu. Bi kasu nagusi aurki ditzakegu:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \text{zenbaki bat} = b$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \neq \text{zenbakia}$
Kasu determinatua: Bukatu dugu, LIMITEAREN DETERMINATUTA dago eta badakigu $x=a$ puntura hurbiltzean, $P(a,b)$ puntuan egongo garela edo hurbilduko garela puntu honetara	Kasu indeterminatua: Segun zer den lortzen duguna, dagokion prozedura garatu beharko dugu, LIMITEAREN BALIOA DETERMINATU arte

Hiru motatako limite desberdinduko ditugu:

(1) LIMITEA FUNTZIOA JARRAITUA DEN PUNTU BATEAN:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Kasu honetan, funtzio *polinomikoak*, *trigonometriko batzuk*, *irrazional batzuk*, etabar... daude. Bete behar dena da euren definizio eremua $\mathbb{R}$ guztiak izatea edota tarte oso bat.

Kasu honetan ordezkapenarekin bukatzen da prozesua

Adibidez

A) $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 7$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 5x^2 + 5x - 7 = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 7 = 8 - 20 + 10 - 7 = -9$$

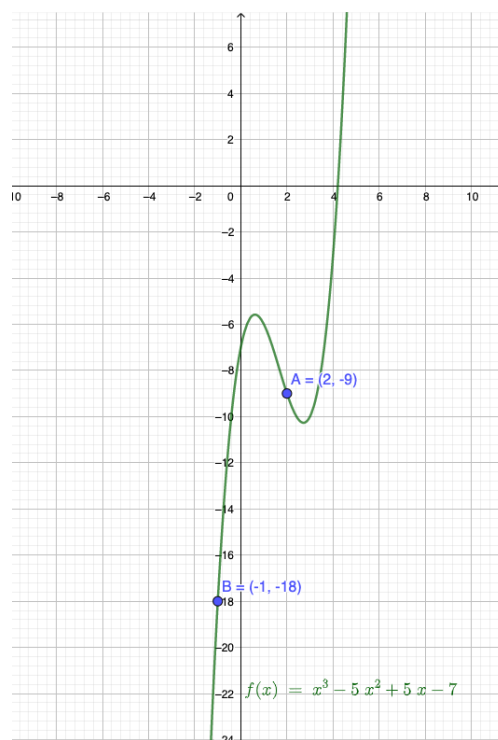
$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 5x^2 + 5x - 7 = (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 7 = -1 - 5 - 5 - 7 = -18$$

Hauek balioen taulan lortuko genituzke balioak dira, besterik ez!!!

Zer esan nahi du limite hauek? **Funtzioa igaro egiten dela bi puntu hauetatik:**

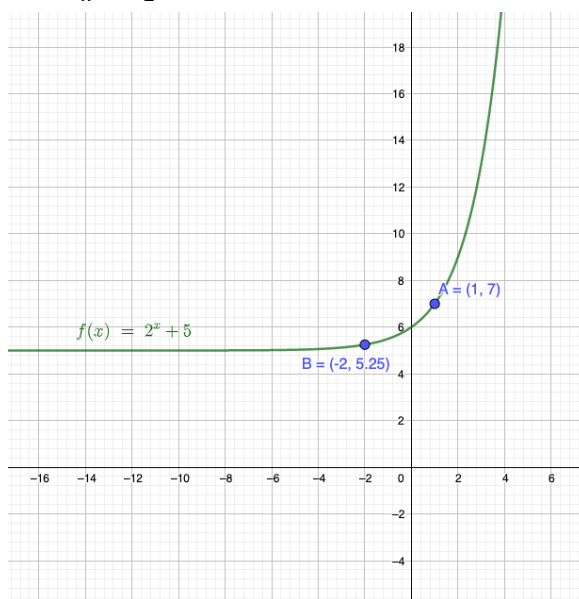
P(2,-9) eta Q(-1,-18)

Sinesteko, Geogebra erabil dezakegu.



B) $y=2^x+5$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2^x + 5 = 2^1 + 5 = 7 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} 2^x + 5 = 2^{-2} + 5 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4}$$



[esteka](#)

ARIKETAK:

Liburuko 278.orria

Proposatutako ariketak

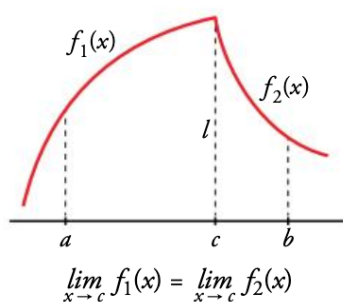
1 Kalkulatu, arrazoituz, limite hauen balioa:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

(2) "ZATIKA" DEFINITURIKO FUNTZIOEN LIMITEAK:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq a \text{ denean} \\ f_2(x) & x > a \text{ denean} \end{cases}$$

A) $C < a$ denean: $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = f_1(c)$

B) $C > a$ denean: $\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = f_2(c)$

C) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ kalkulatzeko **ALBOKO LIMITEAK** kalkulatu behar

dira, eta existitzen badira eta balio bera badute hori izando da limitearen balioa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f_2(a) = B \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f_1(a) = A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = B$$

Adibidez

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x - 5, & x < 3 \\ f_2(x) = -x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

a) $x=3$ puntuan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= f_1(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= f_2(3) = -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

Limitea ez da existitzen

b) $x=7$ puntuan

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 7} (-x + 2) = -7 + 2 = -5$$

P(7,-5) igaro

c) $x=1$ puntuan

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

Q(1,-3) igaro

2. «Zatika» definituriko funtzio baten limiteak eta jarraitutasuna

Modo continuo

Funtzio hau izanda

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{baldin eta } x < -2 \\ 2 & \text{baldin eta } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{baldin eta } x > 1 \end{cases}$$

a) Aurkitu limitea $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$ puntuetan.

b) Aztertu jarraitutasuna.

Egizu zeuk. Aurkitu

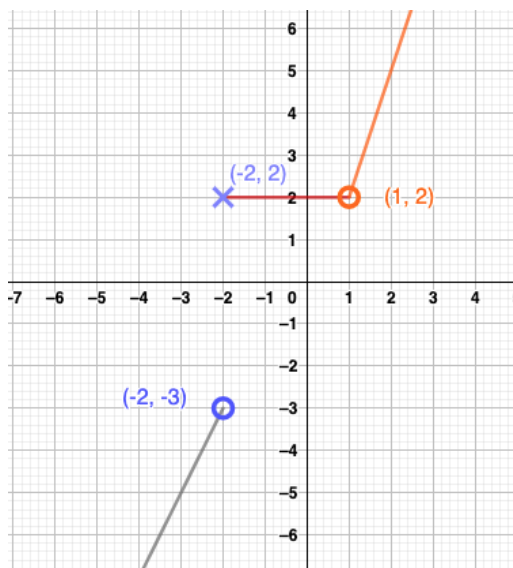
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{baldin eta } x < 3 \\ x-2, & \text{baldin eta } x \geq 3 \end{cases}$$

funtzioaren limitea $x = 0$ eta $x = 3$ puntuetan. Aztertu jarraitutasuna.a) • $x = -2$ «hauste-puntua» da. Hori dela eta, alboko limiteak aztertu behar dira.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2 \end{cases} \quad \text{Ez datoz bat; beraz, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ ez da existitzen.}$$

• $x = 0$ puntuan, $-2 < 0 < 1$ denez, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$ • $x = 1$ «hauste-puntua» da. Alboko limiteak kalkulatu ditugu.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) = 2 \end{cases} \quad \text{Bat datoz. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

b) f etena da $x = -2$ puntuan, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ez delako existitzen; puntu horretan funtzioak jauzi finitu bat du. $x = 1$ puntuan ere etena da, $f(1)$ ez delako existitzen; puntu bat falta zaio, eten saihesgarria da.GEOGEBRA zatika definitutako funtzioak idazteko "Baldin..." aukera erabili behar dzue, adibidez: [esteka](#)

$$g(x) = \text{Baldin}(x < -2, 2x + 1)$$

$$h(x) = \text{Baldin}(-2 \leq x < 1, 2)$$

$$p(x) = \text{Baldin}(x > 1, 3x - 1)$$

ARIKETA:

Liburuko 295.orria

$$8 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{baldin eta } x < 0 \\ x + 1 & \text{baldin eta } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{funtzioa emanda, aurkitu:}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

---> Jarraitutasuna puntu batean

Orain, ikusi dugun azken kasu hau erabiliko dugu funtzioaren jarraitutasuna hausnartzeko, grafikoa ikusi gabe

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{baldin eta } x < 3 \\ x - 2, & \text{baldin eta } x \geq 3 \end{cases}$$

funtzioaren limitea $x = 0$ eta $x = 3$ puntuetan. Aztertu jarraitutasuna.

Funtzioa honen jarraitutasuna ZALANTZAN dago $x=3$ puntuan, ea bi zati LOTUTA dauden ala ez hausnartu behar dugulako. Oso erraza da:

Hiru baldintzak idatzi behar ditugu:

$$1) f(3) = 3 - 2 = 1, \text{ definizio eremukoa da } 3 \in D(f) \rightarrow \mathbf{P(3,1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 3 = 3 \text{ eta } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 - 2 = 1$$

alboko limiteak ez dira berdinak, ez gara heltzen leku berbera, bi zati ez daude lotuta. Ordun

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$3) f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Funtzioa ez da jarraitua $x=3$ puntuan, jauzi finito bat gertatu da, 2 unitateko jauzia, hain zuzen

ARIKETA:

Liburuko 295.orria

9 Aztertu funtzio hauek jarraituak diren adierazitako puntuan:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{baldin eta } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{baldin eta } x \geq -1 \end{cases} \quad x = -1 \text{ puntuan}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{baldin eta } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{baldin eta } x > 1 \end{cases} \quad x = 1 \text{ puntuan}$$

(3) BI POLINOMIOREN ZATIDURAREN LIMITEA (FUNTZIO ARRAZIONALAK):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Hausnartzeko kasuak:

	DETERMINATUAK	INDETERMINATUAK
ZATIKETA	$\frac{P(a)}{Q(a)} = \text{"zenbaki bat"} , a \in D(f) \quad \text{edo} \quad \frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{0} = ? \quad \frac{k}{0} = \pm\infty?, a \notin D(f)$

Kasu honetan hasiko gara kasu determinatuekin. Hau oso erraza da eta ,BERRIZ, **ordezkapenarekin** hasi eta bukatu egiten da prozesua. (1) kasua bezalakoa da.

Adibidez.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4}{x - 4} = \frac{2^3 + 4}{2 - 4} = \frac{12}{-2} = -6 \rightarrow (2, -6) \text{ funtzioaren puntua da}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x}{x^2 + x} = \frac{2^1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow (1, 1) \text{ funtzioaren puntua da}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - x} = \frac{3(-1)^2 + 1}{(-1)^2 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow (-1, 2) \text{ funtzioaren puntua da}$$

ARIKETAK:

Liburuko 295. orria. (Egin ORDEZKAPENA eta badago!!)

7 Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

[Liburuko 296.orria. \(Egin ORDEZKAPENA eta badago!!\)](#)

16 Kalkulatu.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin x}}{1+\cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 10} \log (2\sqrt{3x-5})^3$