Chapitre A5
Nombres entiers

I. Propriétés des entiers

Un nombre entier a est un **diviseur** d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier c tel que $a\times c = b$.
On dit aussi que b est un **multiple** de a.
Par exemple, les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9.
1 est un diviseur de n'importe quel entier.
0 est multiple de tous les nombres entiers :

$$0 = 0\times 1 = 0\times 2 = 0\times 3...$$

Un nombre **premier** est un nombre entier qui possède **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… sont les premiers nombres premiers.
Deux nombres sont **premiers entre eux** s'ils n'ont qu'un seul diviseur commun 1.
7 et 17 sont premiers entre eux.
9 et 8 sont premiers entre eux.
Par contre, 9 et 6 ne sont premiers entre eux car ils sont divisibles par 3.

Remarque
Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, la fraction est irréductible.

Critères de divisibilité

Par 2 Le nombre est **pair** : il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
Par 3 La **somme** des **chiffres** du nombre est **multiple de 3** ;
321 est un multiple de 3 car 3+2+1=6 est un multiple de 3.
195 463 782 est un multiple de 3 car $1 + 9 + 5 + 4 + 6 + 3 + 7 + 8 + 2 = 45$
$4 + 5 = 9$ est un multiple de 3.
Par 5 Le nombre se termine par 0 ou 5

II. Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Un entier peut se décomposer **de manière unique**, à l'ordre des facteurs près, en un produit de nombres premiers.

Par exemple, $36 = 2\times 2\times 3\times 3 = 2^2 \times 3^2$

$60 = 2\times 2\times 3\times 5 = 2^2\times 3\times 5$

Remarque : on note généralement les nombres premiers **du plus petit au plus grand**. On utilise plutôt la notation avec des **puissances**.
La touche **« décomp »** de la calculatrice permet d'obtenir cette décomposition.

Applications

- On veut simplifier la fraction $\frac{256}{720}$.

  Solution

  $\frac{256}{720} = \frac{2^8}{2^4\times 3^2\times 5} = \frac{2^4}{3^2\times 5} = \frac{16}{45}$

- On sait que le produit des âges de mes 2 enfants est 12 ans. *Quels sont leurs âges possibles ?*

  Solution

  $12 = 2^2\times 3$
  Les produits possibles sont $1\times 12 = 2\times 6 = 3\times 4 = 12$
  Mes enfants ont donc 1 et 12 ans, 2 et 6 ans ou 3 et 4 ans.

- J'ai des billes. Si je fais des paquets de 5, il m'en reste 3. Si je fais des paquets de 3, il m'en reste 2. Si je fais des paquets de 4, il m'en reste 1. J'ai moins de 100 billes. *Combien ai-je de billes au maximum ?*

Solution

D'après la dernière condition, le nombre cherché est **impair** : en effet, si l'on fait des paquets de 4, le nombre obtenu est pair et si l'on rajoute 1, le résultat est bien impair.

On sait que le nombre cherché est multiple de 5 auquel on a ajouté 3, il se termine donc par 3 ou 8, donc **par 3** comme il est impair.

Dans cette suite de nombres, on peut ôter tous les multiples de 3 :

13, 23, 43, 53, 73, 83

$13 = 4 \times 3 + 1$ (Division en ligne : 4 est le diviseur, 3 est le quotient et 1 est le reste)

$23 = 4 \times 5 + 3$

$43 = 4 \times 10 + 3$

$53 = 4 \times 13 + 1$

$73 = 4 \times 18 + 1$

$83 = 4 \times 20 + 3$

Seuls 13, 53 et 73 conviennent.

$13 = 3 \times 4 + 1$

$53 = 3 \times 17 + 2$

$73 = 3 \times 24 + 1$

Seul 53 convient. Je possède donc 53 billes.

Remarque : pour trouver le quotient et le reste de la division euclidienne, on peut utiliser la touche potence ⊦ ou la touche ÷R

III. Applications

Problème 1

La somme de 2 nombres pairs est-elle paire ?

Solution

Soit 2 nombres entiers n et p. 2n et 2p sont des nombres pairs.

$$2n + 2p = 2(n + p)$$

$n + p$ est un entier donc $2(n + p)$ est un nombre pair. On vient de démontrer que la somme de 2 nombres pairs est paire.

Problème 2

La somme de 2 nombres impairs est-elle impaire ?

Solution

$3 + 3 = 6$ donc la somme de 2 nombres impairs n'est pas impaire.

Par contre, cette somme est paire.

Soit 2 nombres entiers n et p. $2n + 1$ et $2p + 1$ sont des nombres impairs.

$$2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$$

$n + p + 1$ est un nombre entier donc $2(n + p + 1)$ est un nombre pair.

Problème 3

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est-elle impaire ?

Solution

Soit 2 nombres entiers n et p. $2n$ est un nombre pair et $2p + 1$ est un nombre impair.

$$2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$$

$n + p$ est un nombre entier donc $2(n + p) + 1$ est un nombre impair.

Problème 4

Le produit d'un multiple de 2 et d'un multiple de 3 est-il un multiple de 6 ?

Solution

Soit 2 nombres entiers n et p. $2n$ est un multiple de 2 et $3p$ est un multiple de 3.

$$2n \times 3p = 6np$$

np est un entier donc $6np$ est un multiple de 6.

Problème de partage

Un fleuriste dispose de 378 tulipes et 270 roses. Il veut confectionner un maximum de bouquets identiques et utiliser toutes ses fleurs.

Combien confectionne-t-il de bouquets ? De combien de tulipes et de roses est composé chaque bouquet ?

Solution

$378 = 2\times3\times3\times3\times7$

$270 = 2\times3\times3\times3\times5$

Donc le PGCD de 378 et de 270 est $2\times3\times3\times3 = 54$. On déduit que le fleuriste fera 54 bouquets composés de 7 tulipes et 5 roses.