

Тема: Монотонність і неперервність функцій. Парні і непарні функції.

<https://youtu.be/E1vSyUx0HfY>

Мета:

- *Навчальна:* пригадати поняття монотонності і неперервності функції. Розглянути поняття парності і непарності функції, навчити досліджувати функцію на парність; будувати графіки парних і непарних функцій використовуючи їх властивості симетричності.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння досліджувати функції на парність і непарність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

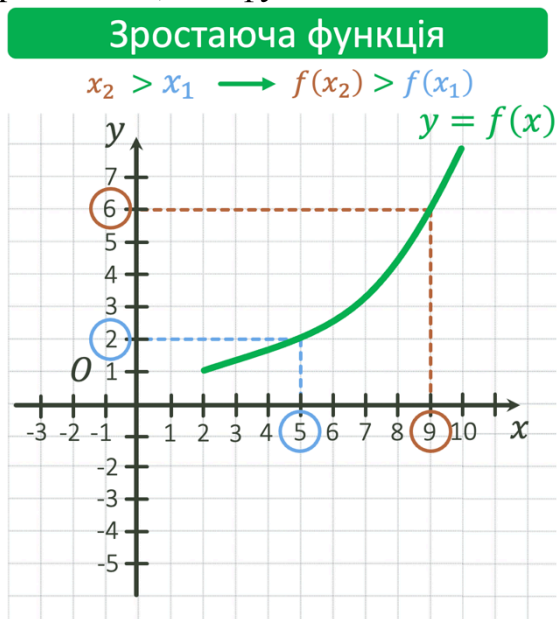
I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

// Монотонність функції

- Пригадайте, яка функція називається зростаючою?



Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

- Вкажіть проміжок зростання даної функції

$[2; 10]$ — проміжок зростання даної функції

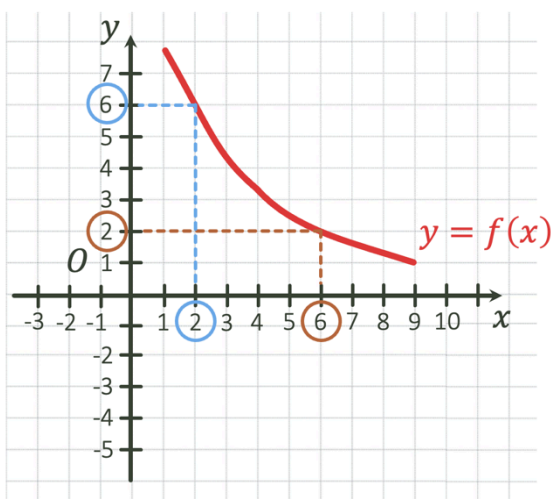
Зростаюча функція

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



Спадна функція

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



- Пригадайте, яка функція називається спадною

Функція називається **спадною**, якщо **більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції**

- Вкажіть проміжок спадання даної функції

$[1; 9]$ — проміжок спадання даної функції

Спадна функція

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



Функція називається **монотонною** на деякому проміжку, якщо вона на цьому проміжку або зростає, або спадає.

Проміжки зростання або спадання функції називаються **проміжками монотонності**.

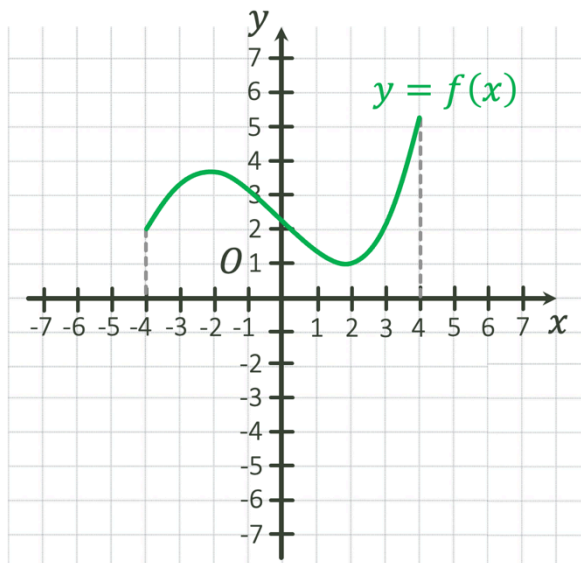
III. Вивчення нового матеріалу

// Симетрія області визначення відносно нуля

- Поясніть, як ви розумієте поняття «Область визначення симетрична відносно нуля?»

(Учні висловлюють власну думку)

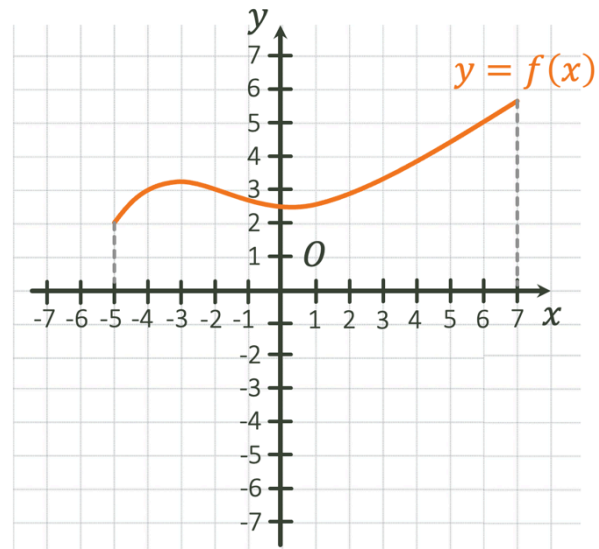
- Знайдіть область визначення обох функцій



$$D(y) = (-4; 4)$$

Область визначення **симетрична** відносно нуля.

Для кожного додатного числа x області визначення, міститься також і число $-x$.



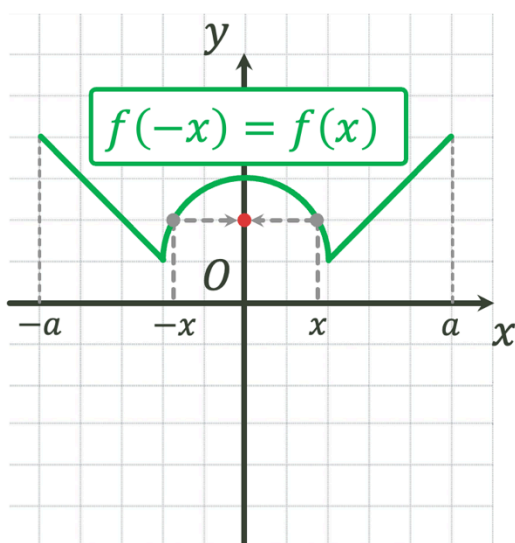
$$D(y) = (-5; 7)$$

Область визначення **несиметрична** відносно нуля.

Для чисел 6 і 7 області визначення не містить чисел -6 і -7 .

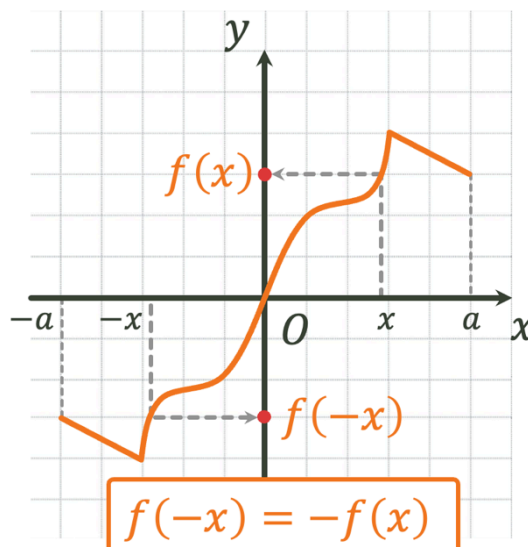
// Парність та непарність функцій

$y = f(x)$ - парна



Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (ординат)

$y = f(x)$ - непарна



Графік непарної функції симетричний відносно початку координат

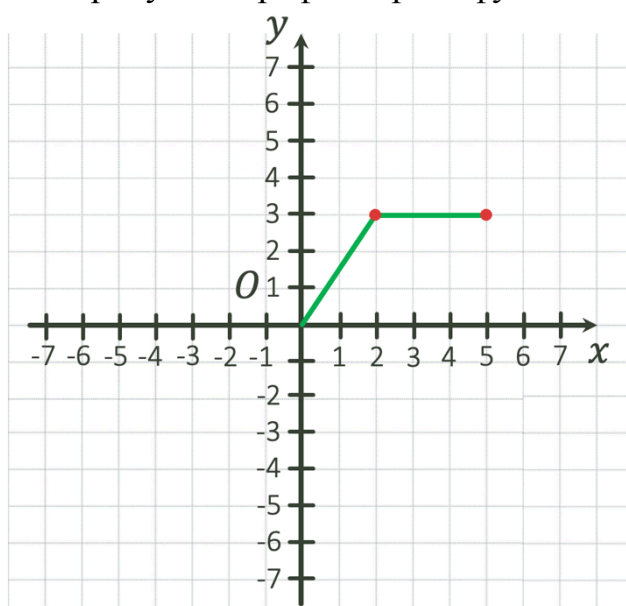
Алгоритм дослідження функції на парність і непарність:

1. Перевірити, чи симетрична область визначення відносно нуля
2. Перевірити виконання умови: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$

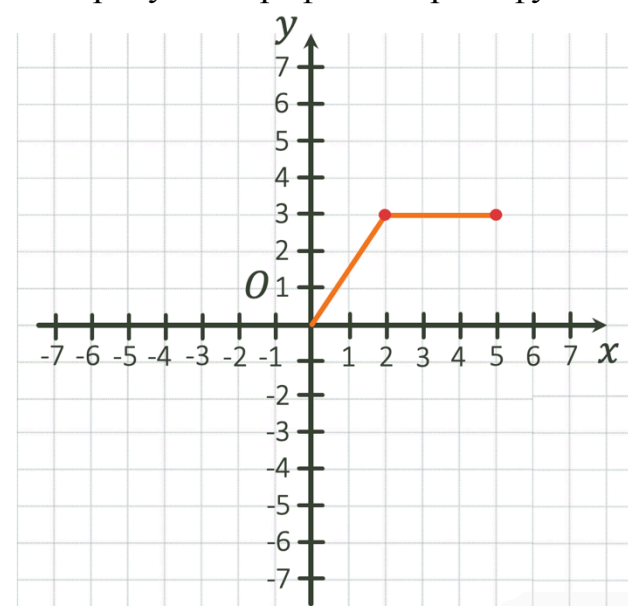
(!) Не будь-яка функція може бути парною або непарною.

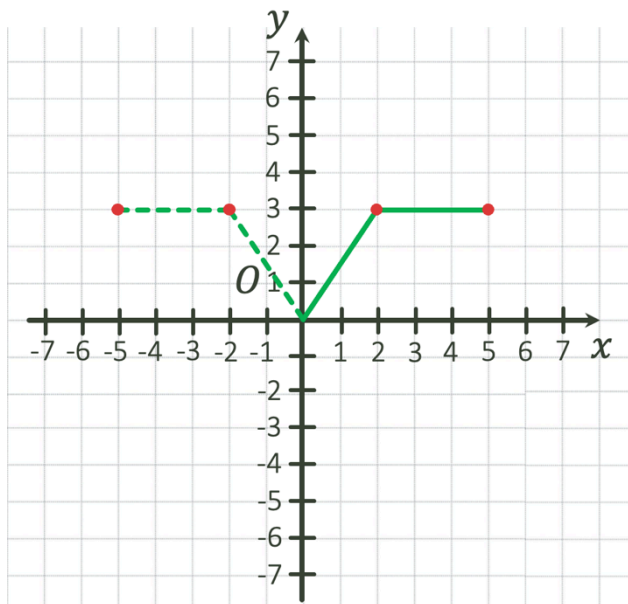
Якщо не виконується хоча б одна з умов алгоритму дослідження функції на парність і непарність, то функція є ні парною ні непарною. Кажуть, що вона є **індиферентною**.

☐ Де потрібно поставити точки, щоб дорисувати графік парної функції?

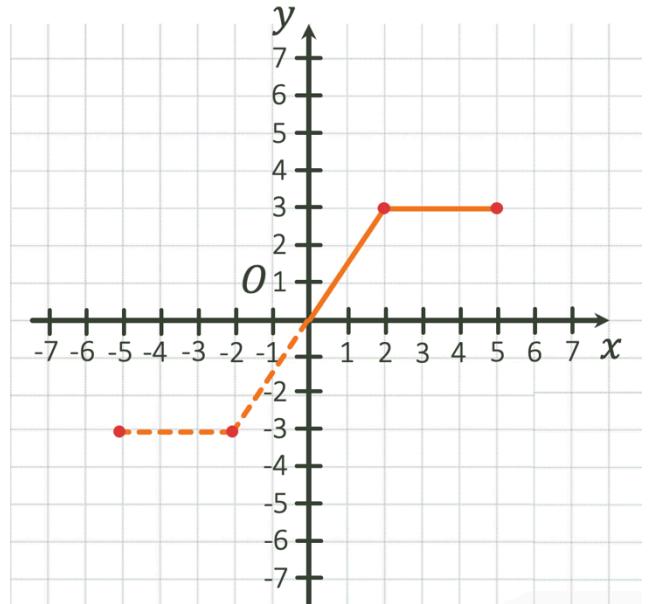


☐ Де потрібно поставити точки, щоб дорисувати графік непарної функції?





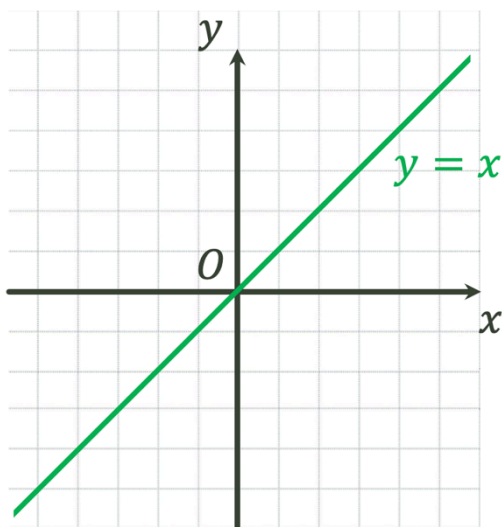
Симетрія відносно осі Oy



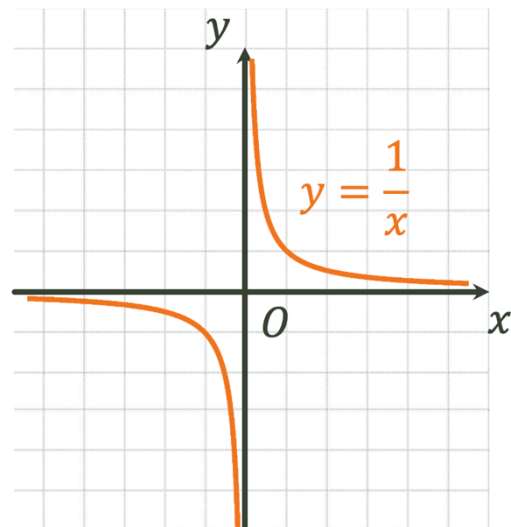
Симетрія відносно початку координат

// Неперервність функції

Функція **неперервна на проміжку**, якщо її графік на цьому проміжку – неперервна лінія.



Неперервна на проміжку $(-\infty; +\infty)$

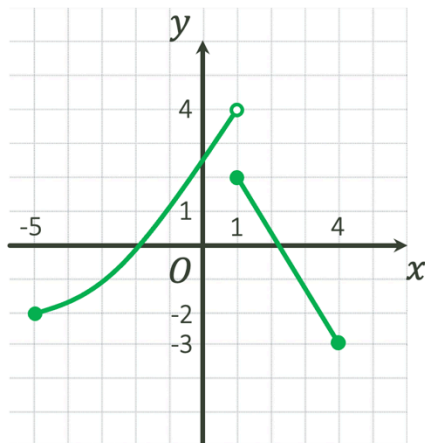


Неперервна на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Точка $x = 0$ – точка розриву

- ☐ Поясніть, чому точка $x = 0$ є точкою розриву для функції $y = \frac{1}{x}$?
(Точка $x = 0$ не належить області визначення даної функції)

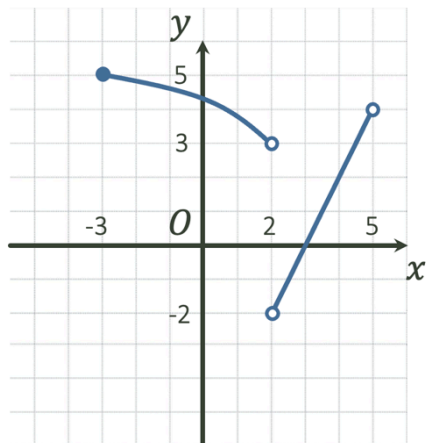
Знайдіть область визначення, область значень та назвіть точки розриву даних функцій:



$$D(f) = [-5; 4]$$

$$E(f) = [-3; 4]$$

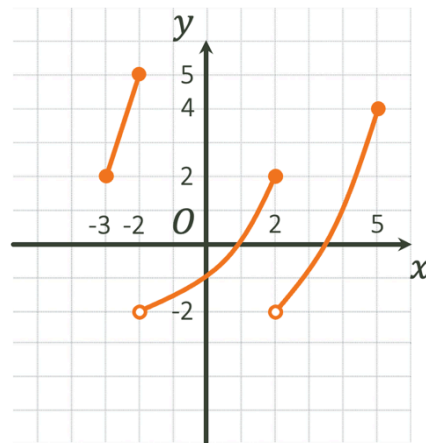
Точка розриву: $x = 1$



$$D(f) = [-3; 2) \cup (2; 5]$$

$$E(f) = (-2; 5]$$

Точка розриву: $x = 2$



$$D(f) = [-3; 5]$$

$$E(f) = (-2; 5]$$

Точки розриву:
 $x = -2; x = 2$

IV. Розв'язування завдань

№1

Відомо, що $f(-3) = 5$. Знайдіть $f(3)$, якщо функція f :

- 1) Парна
- 2) Непарна

Розв'язання:

1) Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, отже:
 $f(3) = 5$

2) Графік непарної функції симетричний відносно початку координат, отже:
 $f(3) = -5$

№2

Функція $y(x)$ спадає на проміжку $[0; 5]$. Порівняйте:

- 1) $y(3)$ і $y(3, 1)$
- 2) $y\left(\frac{1}{4}\right)$ і $y\left(\frac{1}{5}\right)$

Розв'язання:

Якщо функція спадає на певному проміжку, то на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, отже:

- 1) $y(3) > y(3, 1)$
- 2) $y\left(\frac{1}{4}\right) < y\left(\frac{1}{5}\right)$

// Дані завдання краще зробити вибірково відповідно до рівня знань класу

Доведіть, що функція є парною:

$$1) f(x) = 3x^2 + x^4$$

$$2) f(x) = \frac{16x^4}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2-7}{|x|}$$

$$4) f(x) = \sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{3x^2 - 4}$$

$$5) f(x) = |7x^4 - 8| + |8 - 7x^4|$$

Розв'язання:

$$1) f(x) = 3x^2 + x^4$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 + (-x)^4 = 3x^2 + x^4 = f(x)$$

$D(f): x \in \mathbb{R}$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

$$2) f(x) = \frac{16x^4}{x^2+1}$$

$D(f): x \in \mathbb{R}$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \frac{16(-x)^4}{(-x)^2+1} = \frac{16x^4}{x^2+1} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

$$3) f(x) = \frac{x^2-7}{|x|}$$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-7}{|-x|} = \frac{x^2-7}{|x|} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

$$4) f(x) = \sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{3x^2 - 4}$$

Знайдемо область визначення:

$$\{4x^2 - 3 \geq 0 \quad 3x^2 - 4 \geq 0\} \Rightarrow \{x^2 \geq \frac{3}{4} \quad x^2 \geq \frac{4}{3}\} \Rightarrow \{|x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad |x| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\} \Rightarrow \{x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ і } x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$D(f): (-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

// Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2 - 3} + \sqrt{3(-x)^2 - 4} = \sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{3x^2 - 4} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

$$5) f(x) = |7x^4 - 8| + |8 - 7x^4|$$

$D(f): x \in \mathbb{R}$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = |7(-x)^4 - 8| + |8 - 7(-x)^4| = |7x^4 - 8| + |8 - 7x^4| = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

№4

// Дані завдання краще зробити вибірково відповідно до рівня знань класу

Доведіть, що непарною є функція:

1) $f(x) = x^2(4x - x^3)$

2) $f(x) = \frac{x^4+1}{7x^3}$

3) $f(x) = \frac{4}{x}$

4) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$

5) $f(x) = x^{15} - \frac{2x^{23}}{\sqrt{x^4}}$

Розв'язання:

1) $f(x) = x^2(4x - x^3) = 4x^3 - x^5$

$D(f): x \in \mathbb{R}$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = 4(-x)^3 - (-x)^5 = -4x^3 + x^5 = -(4x^3 - x^5) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

2) $f(x) = \frac{x^4+1}{7x^3}$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{7(-x)^3} = \frac{x^4+1}{-7x^3} = -\left(\frac{x^4+1}{7x^3}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

3) $f(x) = \frac{4}{x}$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \frac{4}{-x} = -\left(\frac{4}{x}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

4) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2 - 1}{-x} = -\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

$$5) \quad f(x) = x^{15} - \frac{2x^{23}}{\sqrt{x^4}}$$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \quad // \quad \left(\sqrt{x^4} \neq 0; x \neq 0\right) \quad // \quad \text{Область визначення}$
 симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = (-x)^{15} - \frac{2(-x)^{23}}{\sqrt{(-x)^4}} = -x^{15} - \frac{-2x^{23}}{\sqrt{x^4}} = -x^{15} + \frac{2x^{23}}{\sqrt{x^4}} = -\left(x^{15} - \frac{2x^{23}}{\sqrt{x^4}}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

№5

// Дані завдання краще зробити вибірково відповідно до рівня знань класу

Дослідіть функцію на парність:

$$1) \quad f(x) = x + x^5$$

$$2) \quad f(x) = x + \frac{3}{x}$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$5) \quad y = x^2 - |x|$$

$$6) \quad y = |x^7|$$

$$7) \quad y = \frac{x^2}{x+1}$$

$$8) \quad y = \sqrt{x}$$

Розв'язання:

$$1) \quad f(x) = x + x^5$$

$D(f): x \in \mathbb{R} \quad // \quad \text{Область визначення симетрична відносно початку координат}$

$$f(-x) = (-x) + (-x)^5 = -x - x^5 = -(x + x^5) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

$$2) \quad f(x) = x + \frac{3}{x}$$

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \quad // \quad \text{Область визначення симетрична}$
 відносно початку координат

$$f(-x) = -x + \frac{3}{-x} = -x - \frac{3}{x} = -\left(x + \frac{3}{x}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Отже дана функція непарна.

$$3) \quad f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Знайдемо область визначення:

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$D(f): x \in [-2; 2]$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

4)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

5)

$$y = x^2 - |x|$$

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

6)

$$y = |x^7|$$

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$ // Область визначення симетрична відносно початку координат

$$f(-x) = |-x^7| = |x^7| = f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Отже дана функція парна.

7)

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

Знайдемо область визначення:

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$D(f): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ // Область визначення не симетрична відносно початку координат.

Дана функція ні парна ні непарна.

8)

$$y = \sqrt{x}$$

$D(f): x \in [0; +\infty)$ // Область визначення не симетрична відносно початку координат.

Дана функція ні парна ні непарна.

V. Підсумок уроку

- Яка функція є зростаючою/спадною на певному проміжку?
- Яка область визначення є симетричною відносно нуля?
- Яка функція називається парною/непарною?
- Як перевірити парність функції за допомогою її графіка?
- Яка функція називається неперервною в точці?
- Яка функція називається монотонною на певному проміжку?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §2

О.С. Істер

Виконати № 2.4; 2.8; 2.14(2,3); 2.24(2, 4, 5, 9)

Опрацювати П.1, вміти відповідати на запитання А.Г. Мерзляк
на ст.9; Виконати № 1.2; 1.6; 1.8; 1.11