UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria.
Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados.
Cada pregunta se puntúa con 2,5 puntos.
Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o trasmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)
La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución N(μ, σ).
Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.
a) (1,75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

Resolución

X = producción, en kg/ha $\to N(\mu,\ \sigma) \Rightarrow\ Z\ = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,\ 1)$

Nos dicen que 2% $=\ 0,02\ =\ p(X\ >\ 9000) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z > \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) =$

$= 1\ -\ p\left(Z \le \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow p\left(Z \le \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) = 1\ -\ 0,2\ =\ 0,98$

Usando la tabla de la N(0, 1) en sentido inverso por interpolación, $\frac{9000-\mu}{\sigma}\ =\ 2,055 \Rightarrow \mu\ +\ 2,055\sigma\ =\ 9000$

También dicen que 56% $=\ 0,56\ =\ p(X\ <\ 8315) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8315-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z < \frac{8315-\mu}{\sigma}\right)$

Usando la tabla de la N(0, 1) en sentido inverso, $\frac{8315-\mu}{\sigma}\ =\ 0,15 \Rightarrow \mu\ +\ 0,15\sigma\ =\ 8315$

Queda el sistema $\begin{cases} \mu\ +\ 2,055\sigma\ =\ 9000 \\ \mu\ +\ 0,15\sigma\ =\ 8315 \end{cases}$. Restando, $1,905\sigma\ =\ 685 \Rightarrow \sigma \cong 359,58$

Sustituyendo, $\mu\ =\ 8315\ -\ 0,15\ .\ 359,58 \Rightarrow \mu \cong 8261,06$

Aproximadamente, la media es 8621,06 y la desviación típica 359,58

b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar. (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Resolución

X = producción, en kg/ha $\to N(8261,06\ ;\ 359,58) \Rightarrow\ Z\ = \frac{X-8261,06}{359,58} \to N(0,\ 1)$

Nos piden que $p(X\ >\ 8500) = p\left(\frac{X-8261,06}{359,58} > \frac{8500-8261,06}{359,58}\right) \cong p(Z\ >\ 0,66) = 1\ -\ p(Z\ \le\ 0,66)$

Usando la tabla de la N(0, 1) obtenemos 1 – 0,7454 = 0,2546 = 25,46%

APARTADO 2. ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2,5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Resolución

Si llamamos x, y a los catetos, por el teorema de Pitágoras $y = \sqrt{8^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}$

Nótese que $0 < x < 8$, por ser el cateto siempre menor que la hipotenusa.

Se trata de maximizar el área $A(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{64 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4}$

$A'(x) = \frac{1}{2}\frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} = \frac{32x - x^3}{\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Leftrightarrow 32x - x^3 = x\left(32 - x^2\right) = 0$

$x = 0\ (imposible)$ ó $x = \sqrt{32}$. Hagamos una tabla de signos de A´(x):

Para los signos de A´(x) téngase en cuenta que $y = 32 - x^2$ es una parábola cóncava que corta al eje X en $\pm\sqrt{32}$

	$(0, \sqrt{32})$	$\sqrt{32}$	$(\sqrt{32}, 8)$
f´(x)	+	0	–
f(x)	creciente	máximo	decreciente

El área es máxima para $x = \sqrt{32}$, $y = \sqrt{64 - \left(\sqrt{32}\right)^2} = \sqrt{32}$

Respuesta: Las dimensiones son las de un triángulo rectángulo isósceles de catetos $\sqrt{32}$ m cada uno.

2.2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que f(x) tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas f(x) y f´(x).

Resolución

$f(x) = -x^2 + \alpha x + 11 \qquad f'(x) = -2x + \alpha$.

Como f tiene un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$, entonces $f'(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow -2\frac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$\alpha = 1$, $f(x) = -x^2 + x + 11 \qquad f'(x) = -2x + 1$.

Hallemos las abscisas de los puntos de corte entre las gráficas de f y f´:

$\begin{cases} y = -x^2 + x + 11 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + x + 11 = -2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0,\ x = \frac{3 \pm 7}{2}$, $x = -2$, $x = 5$

El área que pide es $A = \left|\int_{-2}^{5}\left(x^2 - 3x - 10\right)dx\right|$. Una primitiva es

$p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 10x = \frac{2x^3 - 9x^2 - 60x}{6}$

Por Barrow,
$A = |p(5) - p(-2)| = \left| \frac{2.5^3 - 9.5^2 - 60.5}{6} - \frac{2(-2)^3 - 9(-2)^2 - 60(-2)}{6} \right| = \left| \frac{-275 - 68}{6} \right| = \frac{343}{6} \cong 57,17\, u^2.$

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2,5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2
3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.
a) (1,25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo
$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$
Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y
$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -m & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Por ser un sistema homogéneo, rg A = rg A* y por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible.

det A = –6 – m + 3 + 2 – 3m + 3 = –4m + 2 = 0 $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

– Si $m \neq \frac{1}{2}$, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene lógicamente como única solución la trivial x = y = z = 0.

– Si $m = \frac{1}{2}$, el sistema es compatible indeterminado. La matriz del sistema es

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{2f3+f2}{\overset{f3+f1}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f3}{\overset{f1:2 \;\; 2f2:5}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f1=f2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$. Despejando, z = 2x ; –x + y + 2x = 0 ; y = –x

Llamando x = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = 2k \end{cases}$, k ∈ R.

b) (1,25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema $\left(A - \frac{1}{3}A^T\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Resolución

Llamamos $B = A - \frac{1}{3}A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Queda $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

det B = –9 + 3 + 6 + 6 = 6 ≠ 0, existe
$B^{-1} = \frac{1}{\det B}(adj\, B)^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -9 & 7 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & -9 \\ -9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Multiplicando por B^{-1}, por la izquierda en ambos miembros, $B^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = IX = X = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
$X = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & -9 \\ -9 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La solución es x = 1, y = 2, z = 0
3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

----
a) (1,25 puntos) Dada la matriz $A = (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 3\ )$
Estudia el rango de la matriz A – λI según los valores de λ, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Resolución

$B = A - \lambda I = (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 3\ ) - \lambda(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (1 - \lambda\ 0\ 1\ 1\ 1 - \lambda\ -\ 1\ 1\ 0\ 3 - \lambda\ )$

$\det det\ B = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 1] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = 0$

$\lambda = 1$ ó $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

– Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$ y det B ≠ 0. Luego, rg B = 3

– Si λ = 1, det B = 0, $B = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ -\ 1\ 1\ 0\ 2\ )$. Como $|1\ -\ 1\ 1\ 2\ | = 3 \neq 0$, rg B = 2

– Si $\lambda = 2 + \sqrt{2}$, det B = 0, $B = \left(-\ 1 - \sqrt{2}\ 0\ 1\ 1\ -\ 1 - \sqrt{2}\ -\ 1\ 1\ 0\ 1 - \sqrt{2}\ \right)$;
$\left|1\ -\ 1\ 1\ 1 - \sqrt{2}\ \right| = 2 - \sqrt{2} \neq 0$, rg B = 2

– Si $\lambda = 2 - \sqrt{2}$, det B = 0, $B = \left(-\ 1 + \sqrt{2}\ 0\ 1\ 1\ -\ 1 + \sqrt{2}\ -\ 1\ 1\ 0\ 1 + \sqrt{2}\ \right)$;
$\left|1\ -\ 1\ 1\ 1 + \sqrt{2}\ \right| = 2 + \sqrt{2} \neq 0$, rg B = 2

b) (1,25 puntos) Dada la matriz $A = (1\ -\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ -\ 1\ 2\ 0\ 0\ 4\ -\ 1\ )$
Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema AX = b, siendo $b = (0\ 0\ 0\ 0\ )^T$
Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b.

Resolución

$\det det\ A = |1\ -\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ -\ 1\ 2\ 0\ 0\ 4\ -\ 1|\ f2 - 2f1\quad |1\ -\ 1\ 2\ 0\ 0\ 3\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ -\ 1\ 2\ 0\ 0\ 4\ -$

Como det A ≠ 0, existe A–1. Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda en ambos miembros,
$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}b = A^{-1}(0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow X = (0\ 0\ 0\ )$. La solución es la trivial, x = y = z = 0

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2,5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1,25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas r: x = y = z – m y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$
se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.

Resolución

La recta r pasa por A(0, 0, m) y un vector director es $\vec{d}_r = (1,\ 1,\ 1)$. Como $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3/2} = \frac{z-1}{1/2}$,

la recta s pasa por B(1, 0, 1) y tiene de vector director $\vec{d}_s = (2,\ 3/2,\ 1/2)\ //\ (4,\ 3,\ 1)$

Observamos que r y s no son paralelas porque $\vec{d}_r \ // \ \vec{d}_s$

Por tanto, r y s se cortan $\Leftrightarrow det\left(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow |1\ 1\ 1\ 4\ 3\ 1\ 1\ 0\ 1 - m| = 0$

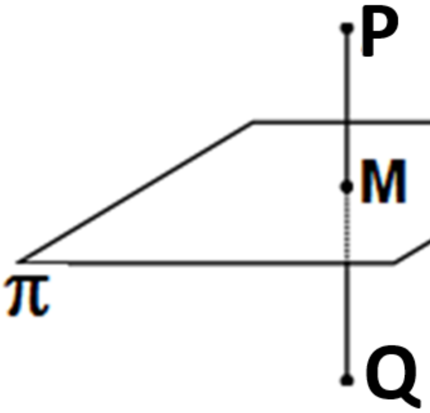
Desarrollando el determinante: 3 – 3m + 1 – 3 – 4 + 4m = m – 3 = 0. Luego, debe ser m = 3.

Para m = 3, en forma paramétrica $r: \{x = k\ y = k\ z = 3 + k$ y $s: \{x = 1 + 4t\ y = 3t\ z = 1 + t$.
Hallemos el punto de corte:
Igualando componentes,
$\{k = 1 + 4t\ k = 3t\ 3 + k = 1 + t \Rightarrow \{3t = 1 + 4t \rightarrow t = -1\ 3 + 3t = 1 + t \rightarrow 2t = -2 \rightarrow t = -1 \Rightarrow$
$\{x = 1 + 4(-1)\ y = 3(-1)\ z = 1 + (-1)$

El punto de corte de r y s es P(–3, –3, 0)

b) (1,25 puntos) Se consideran los puntos P(0, 2, –1) y Q(2, –2, 1). Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

Resolución



El plano π que se pide pasa por M, punto medio de PQ. El punto es $M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$; $M(1, 0, 0)$

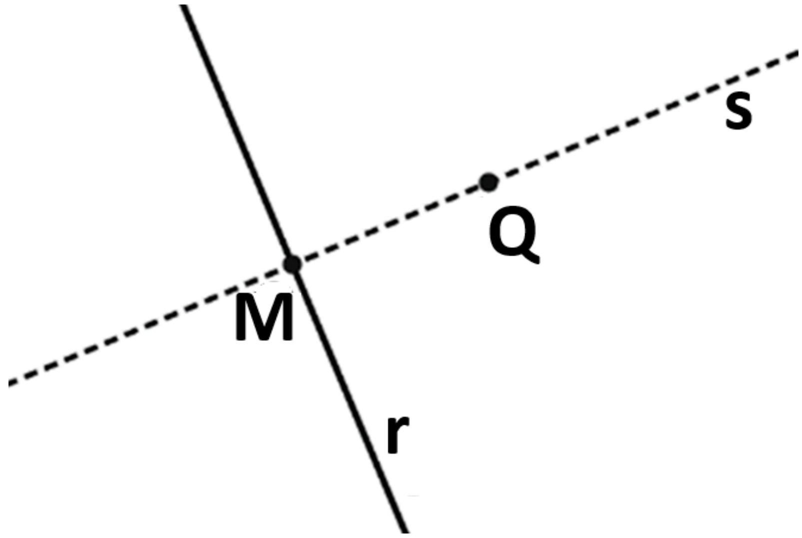
Un vector normal $\vec{n}$ del plano es el vector $\vec{PQ} = (2, -4, 2) \, // \, (1, -2, 1)$

Y como π pasa por M(1, 0, 0) , π: 1(x – 1) – 2(y – 0) + 1(z – 0) = 0, de donde π: x – 2y + z – 1 = 0

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1,25 puntos) Dada la recta r: x – 2 = y + 1 = –z, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q(2, –2, 1)

Resolución



Sea M el punto de r donde s corta a r, M(2 + k, –1 + k, –k). Como $\vec{MQ} \perp \vec{d_r} \Rightarrow \vec{MQ} \cdot \vec{d_r} = 0$.

Dado que $\vec{MQ} = (k,\ k+1,\ -k-1)$, $\vec{d_r} = (1, 1,\ -1)$, operando,

$k + k + 1 + k + 1 = 0 \Rightarrow 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2}{3} \Rightarrow \vec{MQ} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right) // (2,\ -1,\ 1)$

La recta s que se pide pasa por Q(2, –2, 1) y $\vec{d_s} = \vec{MQ} = (2,\ -1,\ 1)$. Luego,

$s: \{x = 2 + 2\lambda\ y = -2 - \lambda\ z = 1 + \lambda$

b) (1,25 puntos) Dados los planos mx + 2y – 3z – 1 = 0 y 2x – 4y + 6z + 5 = 0, halla los valores de m para que sean:
i) paralelos.
ii) perpendiculares.

Resolución

Los vectores normales de los planos, llamémosles π_1 y π_2 son $\vec{n_1} = (m,\ 2,\ -3)$ y $\vec{n_2} = (2,\ -4,\ 6)$

i) $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} // \vec{n_2} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = -0,5$, despejando m = –0,5 . 2. O sea m = –1

ii) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow$ 2m – 8 – 18 = 0, 2m = 26. O sea m = 13