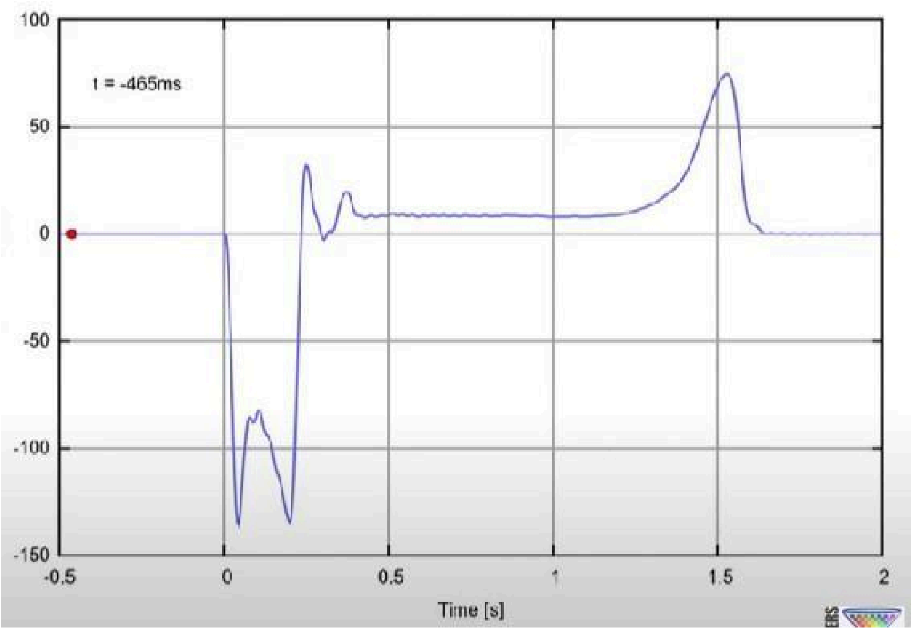
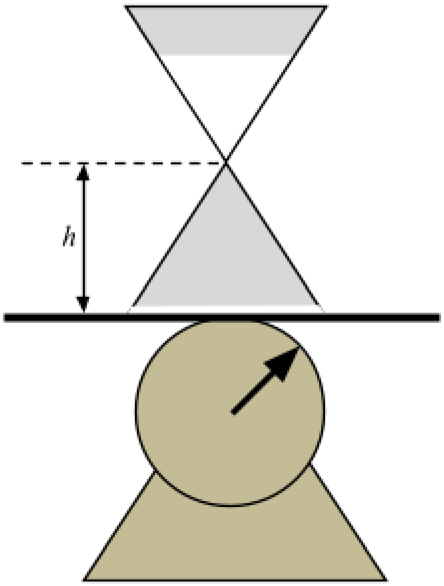
Ας ζυγίσουμε μια κλεψύδρα



Στο βίντεο **[Weight of an Hourglass]** φαίνεται η παραπάνω γραφική παράσταση, της ένδειξης μιας ζυγαριάς, καθώς αδειάζει μια κλεψύδρα. Το *0* της κλίμακας του κατακόρυφου άξονα, αντιστοιχεί στο συνολικό βάρος της κλεψύδρας και της άμμου. Θεωρητικά πως μπορούμε να προσεγγίσουμε το φαινόμενο; Ας κάνουμε κάποιες υποθέσεις:

Μια κλεψύδρα μάζας M τοποθετείται σε ζυγαριά όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά όλη η άμμος μάζας m_0 στην κλεψύδρα συγκρατείται στην πάνω δεξαμενή. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η άμμος απελευθερώνεται και εξέρχεται από την πάνω δεξαμενή με σταθερό ρυθμό $dm/dt = \lambda$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση που δείχνει την ένδειξη της ζυγαριάς σε συνάρτηση με το χρόνο. Δίνεται το g και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Απάντηση

Καταρχήν να τονίσουμε ότι η ζυγαριά δε μετράει το βάρος του σώματος που ζυγίζουμε, αλλά την δύναμη που ασκείται στο δίσκο της από το σώμα. Αν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, το μέτρο της δύναμης αυτής είναι ίσο με το βάρος του σώματος. Περισσότερα στην ανάρτηση

Βάρος και Βαρύτητα

Κάθε κόκκος άμμου εκτελεί ελεύθερη πτώση βγαίνοντας από την πάνω δεξαμενή και χρειάζεται χρόνο

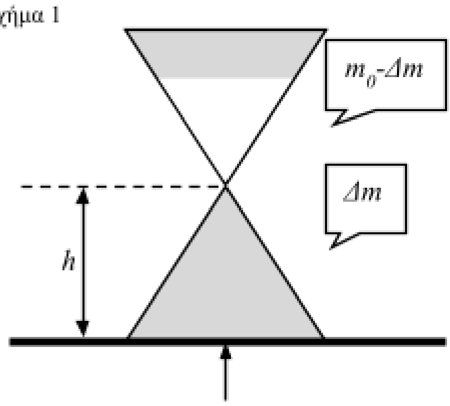
$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

για να φτάσει στον πυθμένα. Στον «αέρα» θα βρίσκεται μάζα άμμου, που βρίσκεται από τον ρυθμό εκροής για χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \; t - t_0 = t : \quad \frac{dm}{dt} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lambda \Leftrightarrow \Delta m = \lambda \cdot t$$

1η φάση: $0 \le t < t_1$ (σχήμα 1)

σχήμα 1



Σε αυτό το χρονικό διάστημα η άμμος που βρίσκεται στον αέρα, δεν ασκεί δύναμη στο δίσκο. Θα λέγαμε ότι κάθε κόκκος που πέφτει, βρίσκεται σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας!

Άρα η ζυγαριά θα δείξει

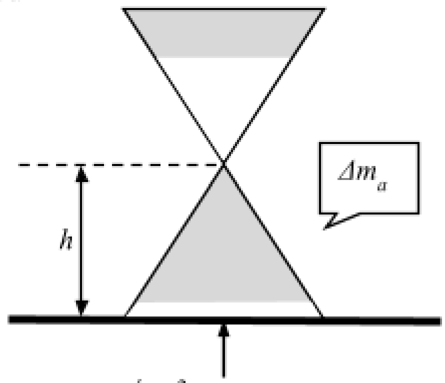
$$F_1 = (M + m_0)g - \Delta m \cdot g \Leftrightarrow$$
$$F_1 = (M + m_0)g - \lambda g t$$

2η φάση: $t_1 \le t < t_2$ (σχήμα 2)

Από τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει η άμμος στον πυθμένα της κάτω δεξαμενής, ως τη χρονική στιγμή t_2, που έχει συσσωρευτεί όλη η άμμος στην κάτω δεξαμενή. Με βάση το ρυθμό ροής της άμμου

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \lambda \Leftrightarrow \frac{m_0 - 0}{t_2 - 0} = \lambda \Leftrightarrow t_2 = \frac{m_0}{\lambda}$$

σχήμα 2



Σε αυτή τη φάση η ένδειξη της ζυγαριάς θα οφείλεται σε δύο φαινόμενα:

- Αυτό που είδαμε στην 1η φάση, αφού υπάρχει άμμος μάζας Δm_α «στον αέρα».

  Πόση είναι αυτή;
  $$\Delta m_\alpha = \lambda \cdot t_1 = \lambda \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

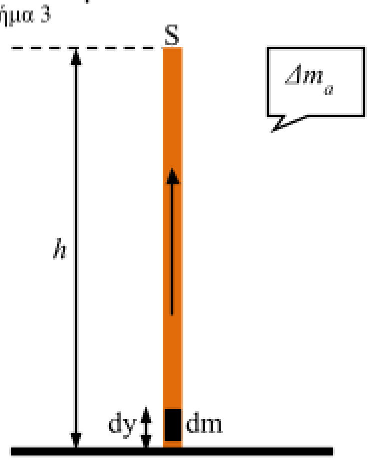
- Ας προσέξουμε στη στήλη της άμμου Δm_α και ύψους h, που βρίσκεται στον «αέρα», το τελευταίο στοιχειώδες τμήμα της, ύψους dy και μάζας dm (σχήμα 3).

  Η πυκνότητα της άμμου μπορεί να θεωρηθεί ως

  $$\rho = \frac{\Delta m_\alpha}{\Delta V_\alpha} = \frac{\lambda \cdot t_1}{S \cdot h} = \frac{\lambda}{Sh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\lambda}{S}\sqrt{\frac{2}{gh}}$$

  Το μέτρο της δύναμης που δέχεται αυτό το τμήμα από την επιφάνεια επαφής είναι με βάση τον 2ο Νόμο Newton:

σχήμα 3



$$N = \frac{dp}{dt} = \frac{\upsilon \cdot dm}{dt} = \upsilon \cdot \frac{\rho \cdot dV}{dt} = \upsilon \cdot \frac{\lambda}{S}\sqrt{\frac{2}{gh}} \cdot \frac{S \cdot dy}{dt}$$

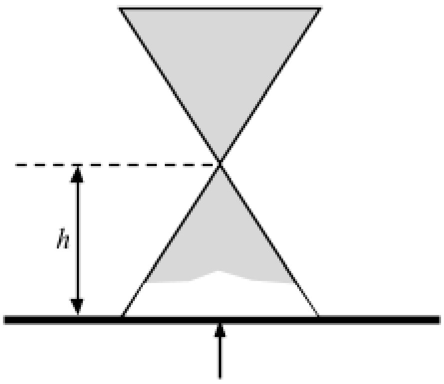
$$= \upsilon^2 \lambda \sqrt{\frac{2}{gh}} = 2gh\lambda \sqrt{\frac{2}{gh}} = 2\lambda \sqrt{\frac{2}{gh} g^2 h^2} = 2\lambda \sqrt{2gh}$$

Με βάση τον 3ο Νόμο Newton, ίδιο μέτρο δύναμης θα ασκεί και η άμμος στον πυθμένα, που θα συνεισφέρει στην ένδειξη της ζυγαριάς.

Άρα η ζυγαριά θα δείξει

$$F_2 = (M + m_0)g - \Delta m_a \cdot g + N \Leftrightarrow$$
$$F_2 = (M + m_0)g - \lambda \cdot \sqrt{2gh} + 2\lambda \cdot \sqrt{2gh}$$
$$F_2 = (M + m_0)g + \lambda \cdot \sqrt{2gh}$$

σχήμα 3



3η φάση: $t_2 \leq t < t_3$ (σχήμα 3)

Από τη χρονική στιγμή t_2, που η άμμος εγκαταλείπει την πάνω δεξαμενή, μέχρι τη χρονική στιγμή t_3, που όλη η άμμος συγκεντρώνεται στον πυθμένα της κάτω δεξαμενής. Ο χρόνος πτώσης του τελευταίου κόκκου άμμου θα είναι πάλι t_1, άρα

$$t_3 = t_2 + t_1$$

Η 3η φάση μην ξεχνάμε ξεκίνησε τη χρονική στιγμή t_2. Η έξτρα μάζα που συγκεντρώνεται στον πυθμένα, μετά τη χρονική στιγμή t_2 και μέχρι την τυχαία t, θα είναι

$$\Delta m_{extra} = \lambda(t - t_2)$$

Άρα η ζυγαριά θα δείχνει ό,τι και στη 2η φάση (μην ξεχνάμε υπάρχει ακόμα η δύναμη $\vec{N}$ εξαιτίας της κρούσης), αυξημένη κατά το βάρος της κατακόρυφης φλέβας άμμου (που σιγά-σιγά στερεύει…). Δηλαδή:

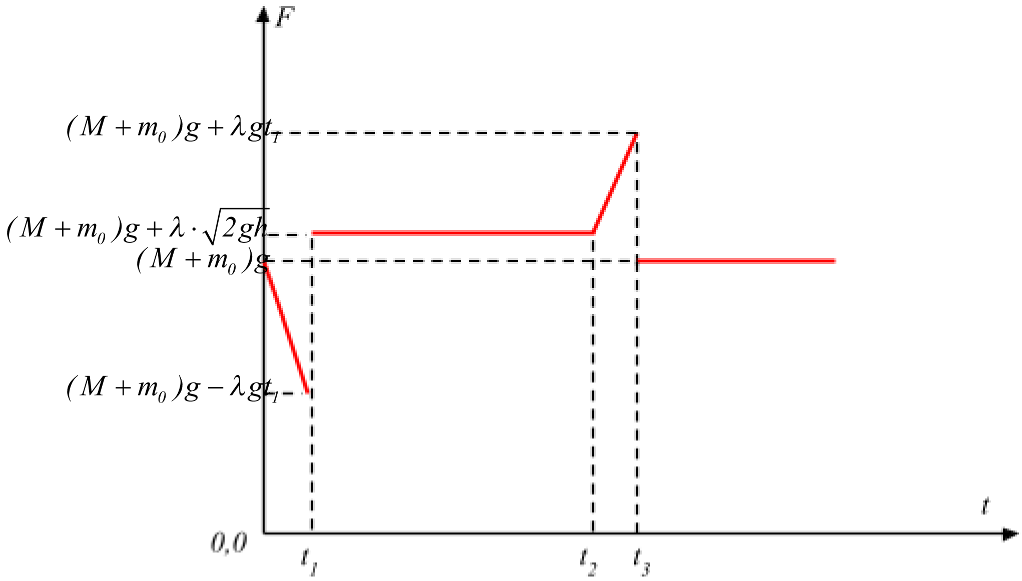
$$F_3 = F_2 + \Delta m_{extra} \cdot g \Leftrightarrow$$
$$F_3 = (M + m_0)g + \lambda \cdot \sqrt{2gh} + \lambda(t - t_2)g$$

4η φάση: $t \geq t_3$

Η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι πλέον σταθερή

$$F_4 = (M + m_0)g$$

Ας τα δούμε όλα αυτά γραφικά:



Λοιπόν, ταιριάζει με το πειραματικό αποτέλεσμα; Αρκετά, αλλά όχι ακριβώς.
Γιατί; Μήπως μια πραγματική ζυγαριά κάνει ταλαντώσεις;

Ανδρέας Ριζόπουλος