

Guía de estudio #1 para Matemática de 3er año elaborada por el profesor Joel Fariñez

Inecuaciones con valor absoluto

Ya en el segundo lapso se desarrolló una introducción al tema de las inecuaciones pasando previamente por los conceptos de los intervalos en la recta real; se recomienda repasar la guía pedagógica número 5 del lapso pasado antes de empezar el estudio de esta. En este curso sólo se tratarán las inecuaciones con valor absoluto con una incógnita y de primer grado

Primer caso: cuando la desigualdad es $<$ ó \leq

En estos casos al resolverse las inecuaciones que contengan las expresiones $<$ ó \leq hay que tener en cuenta que se obtendrán dos resultados parciales por separado, pues como en el caso de la ecuación con valor absoluto hay que plantear dos inecuaciones por separado y resolverlas, y dichos resultados de relacionarán con la operación de intersección de intervalos tema que se desarrolló en la quinta guía del lapso anterior.

Veamos unos ejemplos para visualizar y entender bien lo anteriormente dicho.

Resolver la siguiente inecuación expresando los resultados en forma analítica, gráfica y como intervalos

$\left| \frac{2x-1}{3} \right| \leq 5$ lo primero es plantear dos inecuaciones por separado y luego resolverlas

$$\frac{2x-1}{3} \leq 5 \qquad \text{y} \qquad \frac{2x-1}{3} \geq -5$$

$$2x-1 \leq 5 \cdot 3 \qquad \text{y} \qquad 2x-1 \geq -5 \cdot 3$$

$$2x-1 \leq 15 \qquad \text{y} \qquad 2x-1 \geq -15$$

$$2x \leq 15 + 1$$

y

$$2x \geq -15 + 1$$

$$2x \leq 16$$

y

$$2x \geq -14$$

$$x \leq \frac{16}{2}$$

y

$$x \geq -\frac{14}{2}$$

$$x \leq 8$$

y

$$x \geq -7$$

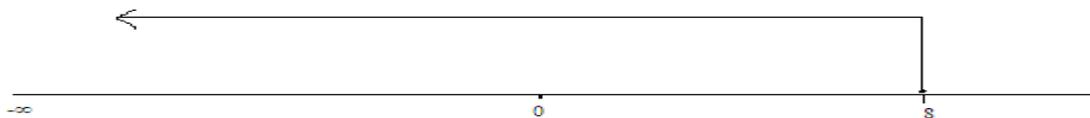
expresiones analíticas

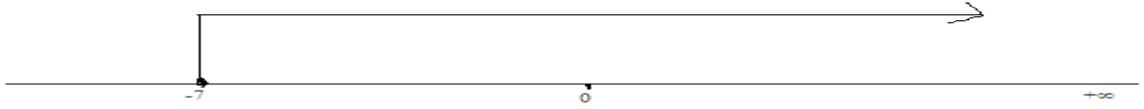
$$x \leq 8 = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 8\}$$

y

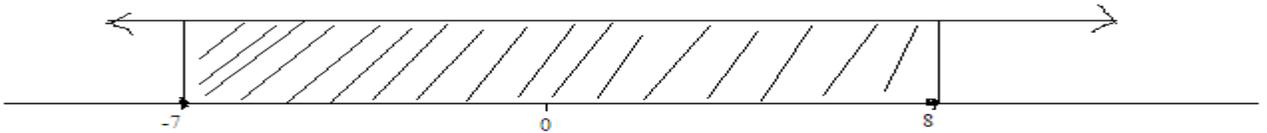
$$x \geq -7 = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -7\}$$

las soluciones gráficas serían





Como intervalos ambas soluciones expresan así: $s_1 = (-\infty, 8]$ y $s_2 = [-7, +\infty)$ ahora se grafican ambas soluciones en una misma recta real



Aquí se ve que la intersección de ambos intervalos comienza en -7 y termina en 8, lo cual se expresa así: $s_1 \cap s_2 = (-\infty, 8] \cap [-7, +\infty) = [-7, 8]$

Vamos ahora con otro ejemplo:

$$\left| \frac{(4x-1)}{5} \right| < 3$$

$$\frac{4x-1}{5} < 3$$

y

$$\frac{4x-1}{5} > -3$$

$$4x-1 < 3 \cdot 5$$

y

$$4x-1 > -3 \cdot 5$$

$$4x-1 < 15$$

y

$$4x-1 > -15$$

$$4x < 15 + 1$$

y

$$4x > -15 + 1$$

$$4x < 16$$

y

$$4x > -14$$

$$x < \frac{16}{4}$$

y

$$x > -\frac{14}{4}$$

$$x < 4$$

y

$$x > -\frac{7}{2}$$

sus respectivas representaciones analítica y en forma de intervalo son

$$x < 4 = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\}$$

y

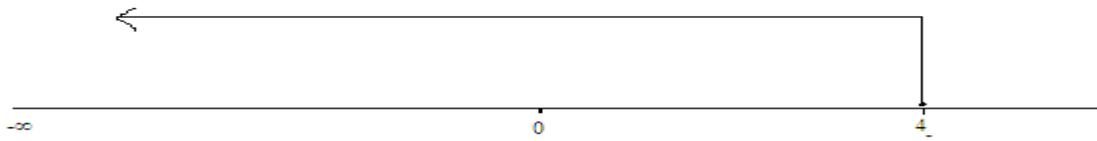
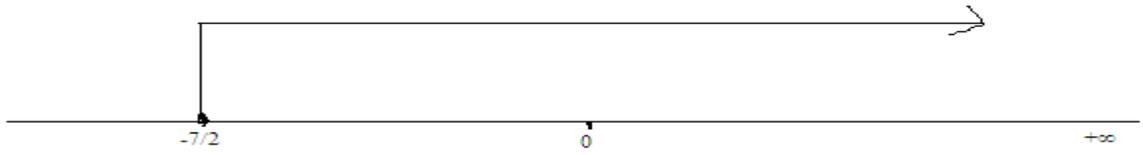
$$x > -\frac{7}{2} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{7}{2}\right\}$$

$$x < 4 = (-\infty, 4)$$

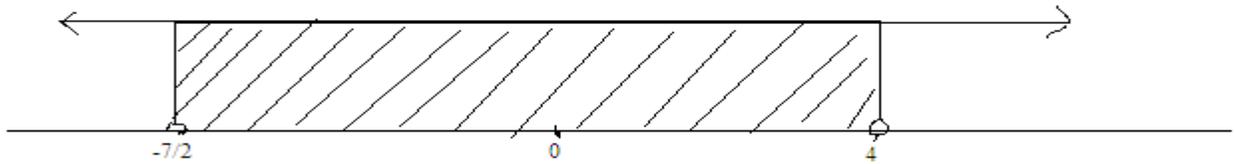
y

$$x > -\frac{7}{2} = \left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

Las gráficas de dichos intervalos son



Ahora podemos graficar de una vez ambos resultados, quedando así:



Aquí se observa que ambas soluciones se interceptan comenzando en $-7/2$ y terminando en 4 esto se expresa así: $(-\infty, 4) \cap \left(-\frac{7}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$

Segundo caso. Cuando la desigualdad es $>$ ó \geq

En estos casos al resolverse las inecuaciones que contengan las expresiones $>$ ó \geq hay que tener en cuenta que se obtendrán dos resultados parciales por separado, pues como en el caso de la ecuación con valor absoluto hay que plantear dos inecuaciones por separado y resolverlas, y dichos resultados de relacionarán con la operación de unión de intervalos tema que se desarrolló en la quinta guía del lapso anterior.

Veamos unos ejemplos para visualizar y entender bien lo anteriormente dicho.

Resolver la siguiente inecuación expresando los resultados en forma analítica, gráfica y como intervalos.

$\left|\frac{3x-1}{4}\right| \geq 1$ lo primero es plantear dos inecuaciones por separado y luego resolverlas

$$\frac{3x-1}{4} \geq 1$$

y

$$\frac{3x-1}{4} \leq -1$$

$$3x-1 \geq 4 \cdot 1$$

y

$$3x-1 \leq -1 \cdot 4$$

$$3x-1 \geq 4$$

y

$$3x-1 \leq -4$$

$$3x \geq 4+1$$

y

$$3 \leq -4+1$$

$$3x \geq 5$$

y

$$3x \leq -3$$

$$x \geq \frac{5}{3}$$

y

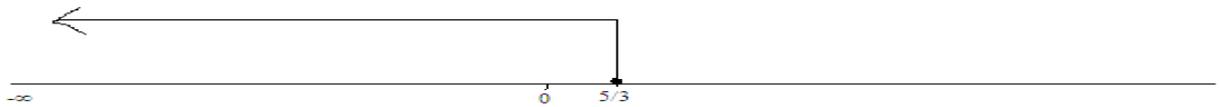
$$x \leq -\frac{3}{3}$$

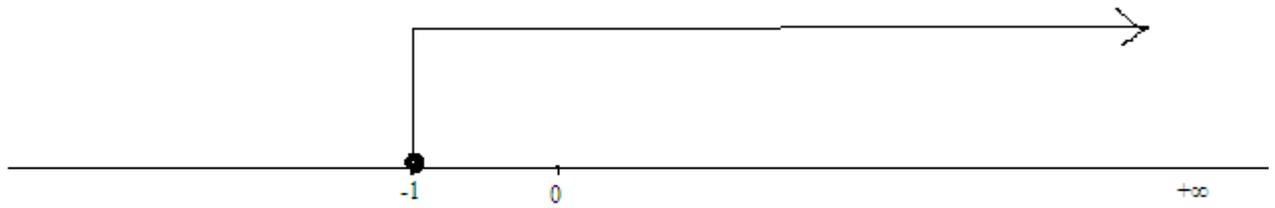
$$x \geq \frac{5}{3}$$

y

$$x \leq -1$$

Gráficamente tenemos para ambos conjuntos solución lo siguiente



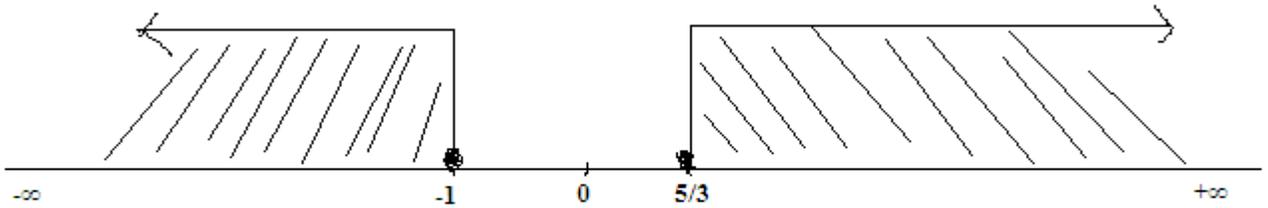


sus expresiones analíticas son

$$x \geq \frac{5}{3} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{5}{3} \right\} \quad \text{y} \quad x \leq -1 = \{ x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \}$$

En forma intervalo tenemos $s_1 = \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$ y $s_2 = (-\infty, -1]$

Ahora podemos graficar de una vez ambos resultados, quedando así:



Esto se expresa así: $s_1 \cup s_2 = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$

Veamos otro ejemplo

$$\left| \frac{(7x-2)}{3} \right| > 5$$

procedemos como en el ejemplo anterior

$$\frac{7x-2}{3} > 5$$

y

$$\frac{7x-2}{3} < -5$$

$$7x-2 > 5 \cdot 3$$

y

$$7x-2 < -5 \cdot 3$$

$$7x-2 > 15$$

y

$$7x-2 < -15$$

$$7x > 15 + 2$$

y

$$7x < -15 + 2$$

$$7x > 17$$

y

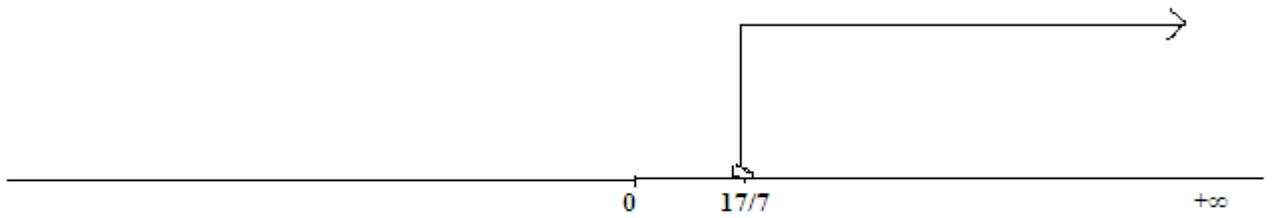
$$7x < -13$$

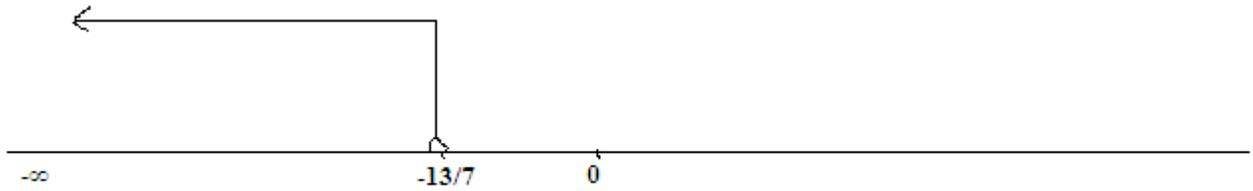
$$x > \frac{17}{7}$$

y

$$x < -\frac{13}{7}$$

Sus gráficas son:



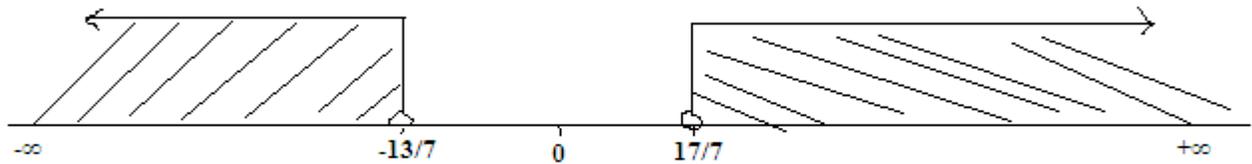


Y sus expresiones analíticas y en forma de intervalo vienen dadas por:

$$x > \frac{17}{7} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{17}{7} \right\} = \left(\frac{17}{7}, +\infty \right) = s_1$$

$$y \quad x < -\frac{13}{7} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < -\frac{13}{7} \right\} = \left(-\infty, -\frac{13}{7} \right) = s_2$$

Gráficamente se representa la solución final que es la unión de ambos intervalos



Analíticamente y en forma de intervalo esto quedaría así:

$$\begin{aligned}
 s_1 \cup s_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in \left(-\infty, -\frac{13}{7} \right) \text{ o } x \in \left(\frac{17}{7}, +\infty \right) \right\} \\
 &= \left(-\infty, -\frac{13}{7} \right) \cup \left(\frac{17}{7}, +\infty \right)
 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

a.) resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto dando los resultado gráficamente, analíticamente y en forma de intervalos

$$\left| \frac{5x-4}{7} \right| < 2$$

$$\left| \frac{7x-9}{5} \right| \leq 6$$

$$\left| \frac{11x-18}{4} \right| < 15$$

$$\left| \frac{10x-17}{9} \right| \leq 14$$

b.) Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto dando los resultado gráficamente, analíticamente y en forma de intervalos

$$\left| \frac{9x-8}{7} \right| \geq 11$$

$$\left| \frac{8x-12}{9} \right| > 15$$

$$\left| \frac{4x-13}{8} \right| > 14$$

$$\left| \frac{5x-10}{3} \right| \geq 16$$