

Тема 1.1.4 Центр ваги

План

1. Центр паралельних сил
2. Центр ваги твердого тіла
3. Методи знаходження координат центра ваги.
4. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

https://docs.google.com/presentation/d/1_iQXKmgZK7soND6kaxcSIyCf-UatFNZk/edit?usp=sharing&ouid=103912148940254308897&rtpof=true&sd=true

<https://www.youtube.com/watch?v=ziIx16gi-hw>

1. Центр паралельних сил

Центр паралельних сил – це точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил за будь-якого обертання їх навколо точок прикладання в один бік і на такий самий кут.

Покажемо існування центра паралельних сил на прикладі системи двох сил F_1 і F_2 . Відповідно до теореми про додавання двох паралельних сил, спрямованих в один бік, знайдемо рівнодіючу R цих сил і лінію її дії (рис.1).

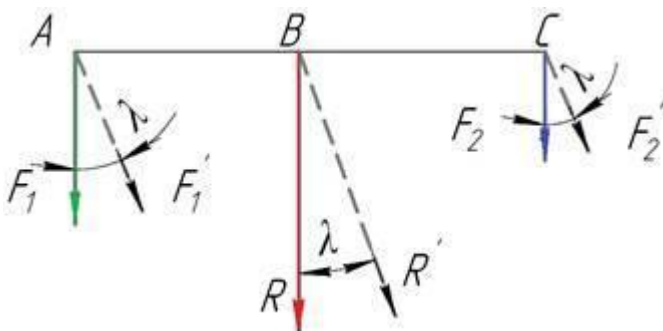


Рис.1

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Точка С, яка лежить на лінії АВ, що сполучає точки прикладання цих сил, є центром двох паралельних сил F_1 і F_2 , оскільки від повертання їх на один і той самий кут λ відношення пліч ВС і СА не зміниться і рівнодіюча також пройде через точку С.

Можна дійти висновку, що рівнодіюча паралельних сил рівна їх сумі, паралельна їм, спрямована в ту саму сторону, а її лінія дії ділить пряму, яка з'єднує їх точки прикладання на відрізки, зворотно пропорційні цим силам.

Координати центра системи n паралельних сил визначають за формулами:

$$X_c = \frac{\sum F_n \cdot X_n}{\sum F_n}; \quad Y_c = \frac{\sum F_n \cdot Y_n}{\sum F_n}; \quad Z_c = \frac{\sum F_n \cdot Z_n}{\sum F_n},$$

де X_n, Y_n, Z_n – координати точок прикладання сил, відносно обраної системи осей координат.

2. Центр ваги твердого тіла

Силу, з якою тіло притягується до Землі, називають **силою тяжіння**.

Для тіл, розміри яких малі порівняно з радіусом землі ($R = 6380$ км) можна вважати, що сили ваги їх частинок паралельні одна одній і зберігають постійну величину за будь якого обертання тіла.

Центром ваги називають центр паралельних сил тяжіння усіх елементарних частинок тіла.

Центр ваги – це точка, яка може лежати й за межами тіла (наприклад кільце, циліндр з отвором).

Координати центра ваги тіла знаходять за такими самими формулами, що й координати центра паралельних:

$$X_c = \frac{\sum G_n \cdot X_n}{\sum G_n}; \quad Y_c = \frac{\sum G_n \cdot Y_n}{\sum G_n}; \quad Z_c = \frac{\sum G_n \cdot Z_n}{\sum G_n},$$

де G_n – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;

X_n, Y_n, Z_n – координати частинки;

$\sum G_n$ – сила тяжіння усього тіла.

Якщо тіла однорідні, то за такими самими формулами можна визначити координати центра ваги об'ємів, площин і ліній.

1) Сила тяжіння елементарної частини, виражена через її об'єм V_n буде

$$G_n = \gamma \cdot V_n,$$

де γ – вага одиниці об'єму:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot \sum G_n \cdot X_n}{\gamma \cdot \sum G_n} = \frac{\sum V_n \cdot X_n}{V}; \quad Y_c = \frac{\sum V_n \cdot Y_n}{V}; \quad Z_c = \frac{\sum V_n \cdot Z_n}{V},$$

де V – об'єм тіла.

2) Якщо тіло є однорідною пластиною завтовшки h , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через площу A_n , буде

$$G_n = \gamma \cdot h \cdot A_n$$

тоді для площі:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot h \cdot \sum A_n \cdot X_n}{\gamma \cdot h \cdot \sum A_n} = \frac{\sum A_n \cdot X_n}{A}; \quad Y_c = \frac{\sum A_n \cdot Y_n}{A}; \quad Z_c = \frac{\sum A_n \cdot Z_n}{A}.$$

3) Якщо тіло є однорідним дротом сталого поперечного перерізу A , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через довжину l_n буде

$$G_n = \gamma \cdot l_n \cdot A_n,$$

тоді для лінії:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot A \cdot \sum l_n \cdot X_n}{\gamma \cdot A \cdot \sum l_n} = \frac{\sum l_n \cdot X_n}{l}; \quad Y_c = \frac{\sum l_n \cdot Y_n}{l}; \quad Z_c = \frac{\sum l_n \cdot Z_n}{l}.$$

3. Методи знаходження координат центра ваги. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Центр ваги тіла можна визначити *теоретичним* та *експериментальним* методами.

Існує **три методи** теоретичного визначення центра ваги: метод симетрії, метод розбиття, метод від'ємних мас.

Метод симетрії. Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині; якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла лежить на цій осі; якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то центр ваги тіла лежить у точці їх перетину; центр ваги однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття – тіло розбивають на найменшу кількість частин, сила тяжіння і центри ваги яких відомі, після цього використовують формули, розглянуті вище.

Метод від'ємних мас – тіло, яке має порожнини, вважають суцільним, масу ж вільних порожнин вважають від'ємною. Формули для визначення координат центра ваги тіла залишаються ті самі. Отже, для визначення центра ваги тіла, що має вільні порожнини, треба застосовувати метод розбиття, але масу вільних порожнин вважати від'ємною.

Тіло під дією власної ваги може перебувати в стані спокою лише тоді, коли напрям сили ваги проходить через точку опори, оскільки тільки в цьому випадку сила ваги врівноважуватиметься силою опору в'язі.

При цьому можливі *такі три випадки*:

1) Центр ваги тіла знаходиться вище опори (рис.2а). Коли тіло відхилити від положення рівноваги (рис. 2б), виникне пара сил Q , N , яка почне відхиляти тіло від свого початкового положення. Таку рівновагу називають *нестійкою*.

Нестійка рівновага може бути лише тоді, коли центр ваги лежить вище точки опори.

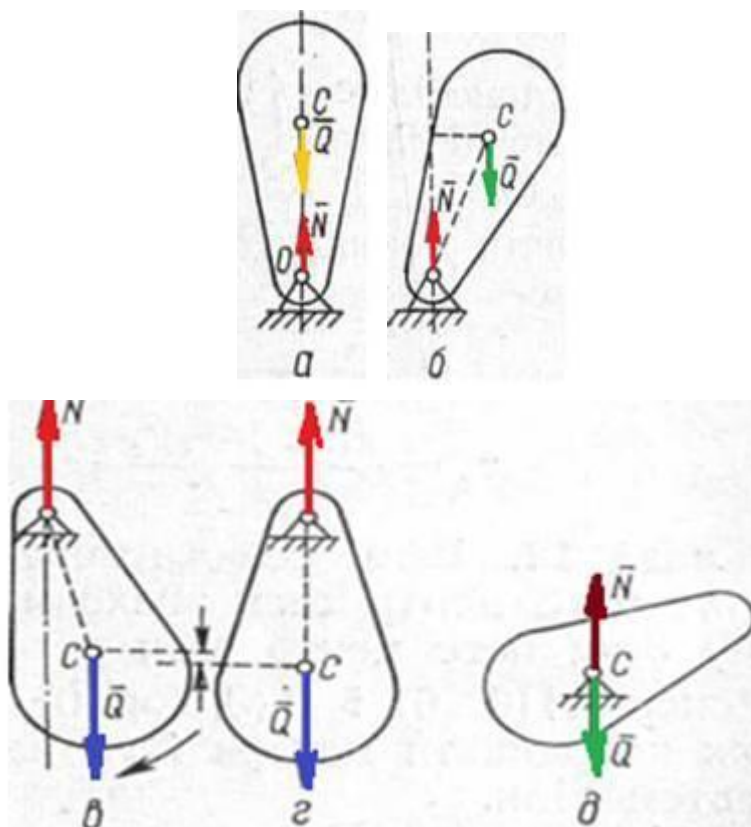


Рис. 2

2) Центр ваги знаходиться нижче точки опори (рис. 2в,г). За відхилення тіла з положення рівноваги виникне пара сил Q, N , що знову поверне його в початкове положення. Таку рівновагу називають *стійкою*. Це буде лише тоді, коли центр ваги тіла лежить нижче опори і займає найнижче з можливих положень.

3) Центр ваги збігається з точкою опори (рис. 2д). У такому випадку за відхилення тіла з положення рівноваги центр ваги залишиться на місці, пара сил при цьому не виникне. Отже, тіло перебуватиме в стані спокою за будь-якого положення. Таку рівновагу називають *байдужою*.

Якщо тіло має кілька точок опори, то рівновага буде стійкою, доки пара сил Q, N , що виникне, намагатиметься повернути тіло в початкове положення.

Наприклад, трактор буде стійким, доки напрям сили його ваги проходить між колесами. Якщо ж трактор займе таке положення, за якого лінія дії сили ваги його пройде через точку опори колеса, то рівновага буде нестійкою; за найменшого збільшення кута нахилу сила ваги його утворить з силою опору ґрунту пару, яка перекине трактор.

https://www.youtube.com/watch?v=gpoRM_NpODE

Тема. Центр ваги тіла.

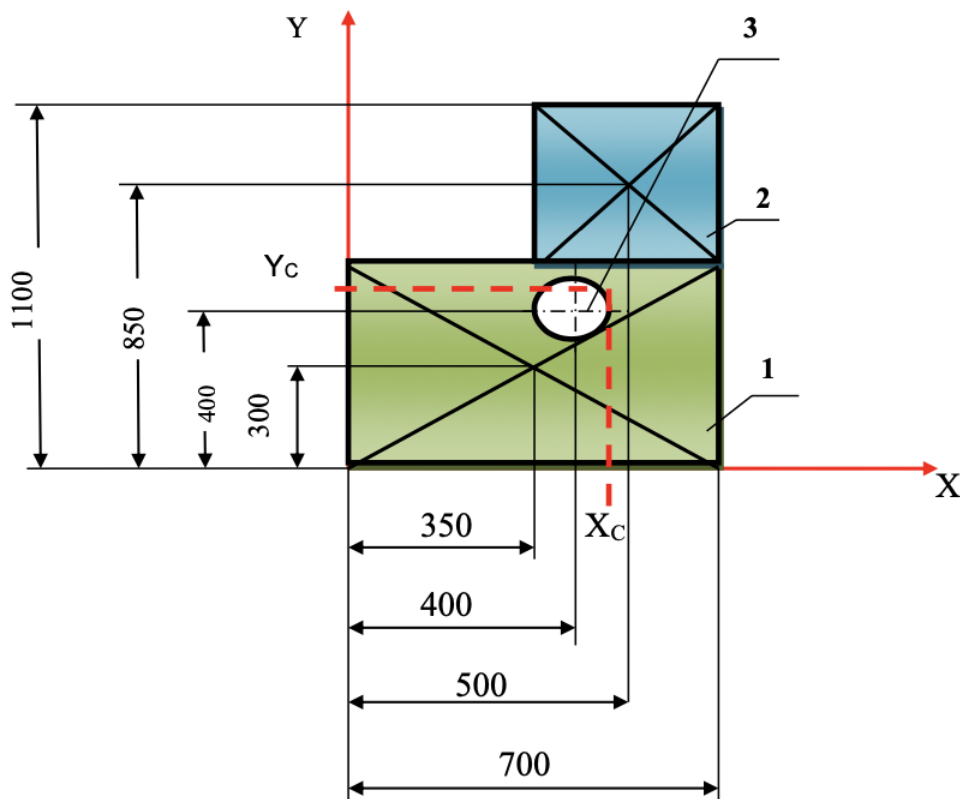
Завдання. Визначити координати центра ваги плоскої фігури.

Алгоритм розв'язання задачі.

1. Зображуємо переріз у довільному масштабі.
2. Розбиваємо переріз на прості фігури і наносимо положення центрів їхньої ваги на схему перерізу.
3. Вибираємо систему координат (якщо переріз має вісь симетрії, то одну з координатних осей розташовуємо вздовж осі симетрії).
4. Визначаємо координати ваги всієї фігури.
5. Наносимо положення центра ваги всієї фігури на схему перерізу.

Приклад виконання самостійної роботи.

Завдання. Визначити координати центра ваги плоскої фігури.



1. Розбиваємо фігуру на прості частини:
 - прямокутник—1;
 - прямокутник—2;
 - коло—3.
2. Вибираємо систему координат X та Y .
3. Визначаємо координати центрів ваги складових:
 - прямокутник 1 – $x_1=350\text{мм}$; $Y_1=300\text{мм}$; $A_1=420\,000\text{мм}^2$;
 - прямокутник 2 – $x_2=500\text{мм}$; $Y_2=850\text{мм}$; $A_2=200\,000\text{мм}^2$;
 - кола 3 – $x_3=400\text{мм}$; $Y_3=400\text{мм}$; $A_3=80\,400\text{мм}^2$;
4. Визначаємо координати ваги всієї фігури:

$$X_c = \frac{A_1 \cdot X_{C1} + A_2 \cdot X_{C2} - A_3 \cdot X_{C3}}{A_1 + A_2 - A_3}$$

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot Y_{C1} + A_2 \cdot Y_{C2} - A_3 \cdot Y_{C3}}{A_1 + A_2 - A_3}$$

$$Y_c = \frac{42 \cdot 10^4 \cdot 300 + 2 \cdot 10^5 \cdot 850 - 80400 \cdot 400}{42 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5 - 80400} = 492 \text{мм}$$

$$X_c = \frac{42 \cdot 10^4 \cdot 350 + 2 \cdot 10^5 \cdot 500 - 80400 \cdot 400}{42 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5 - 80400} = 407 \text{мм}$$

Наносимо положення центра ваги на фігурі

Таблиця № Вхідні значення для задач.

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ схеми	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, м$	1	5	4	5	8	6	9	9	3	8
$b, м$	4	7	4	10	10	9	7	-	6	5
$c, м$	2	3	-	2	6	-	3	-	3	-
$d, м$	4	1	-	3	12	-	4	4	-	-

Таблиця № (продовження) Вхідні значення для задач.

№ варіанта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
№ схеми	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, м$	2	4	10	6	6	8	15	7	8	16
$b, м$	3	6	15	8	8	14	8	-	12	7
$c, м$	4	3	-	3	6	-	8	-	6	-
$d, м$	6	1	-	2	12	-	2	2	-	-

Таблиця № (продовження) Вхідні значення для задач.

№ варіанта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
№ схеми	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, м$	3	3	8	9	3	5	10	12	4	10
$b, м$	6	8	20	10	5	10	9	-	8	6
$c, м$	3	2	-	4	6	-	6	-	6	-
$d, м$	5	1	-	4	9	-	3	3	-	-

схема 1

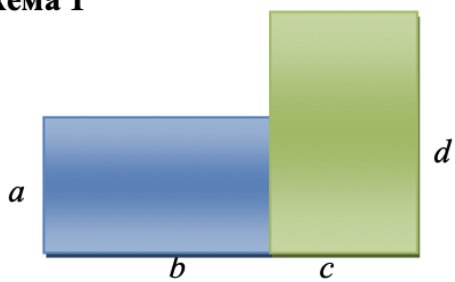


схема 2

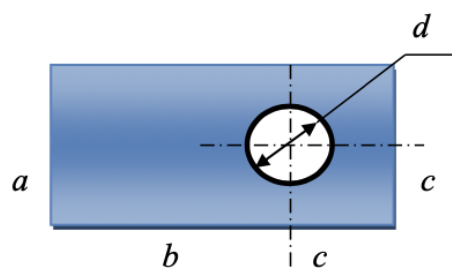


схема 3

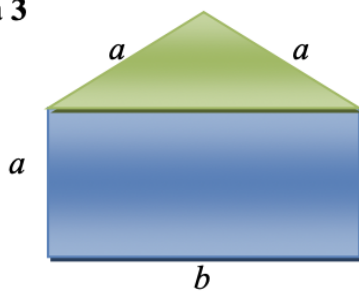


схема 4

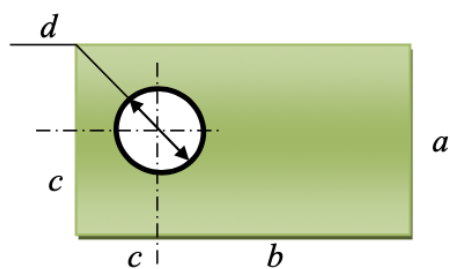


схема 5

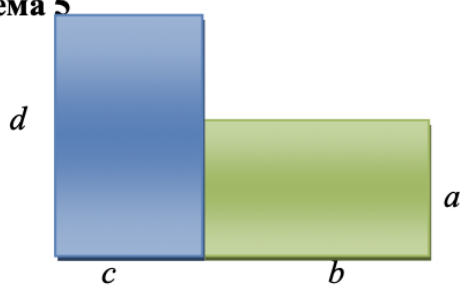


схема 6

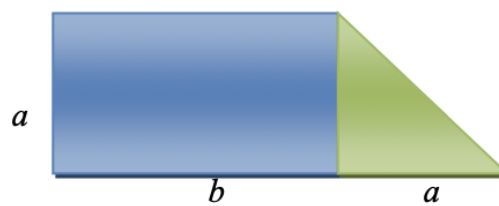


схема 7

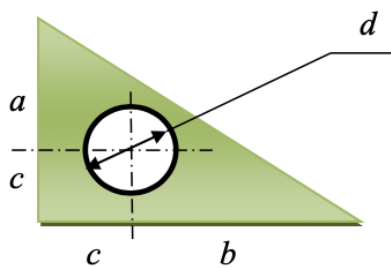


схема 8

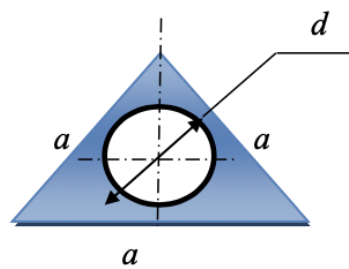


схема 9

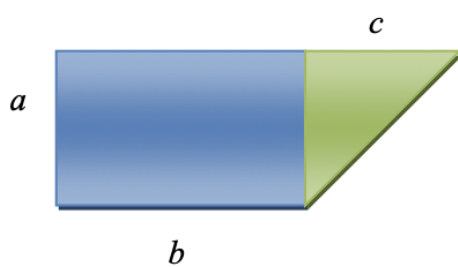


схема 10

