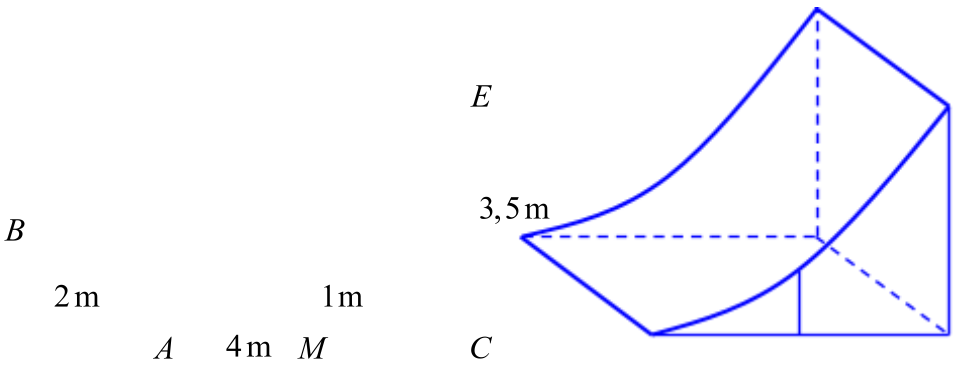
# MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG TOÁN THỰC TIỄN

## ( Phần 1)

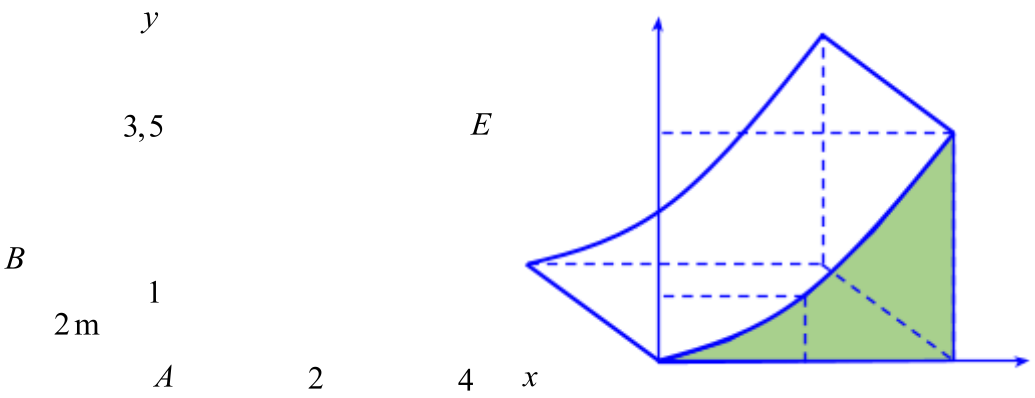
**Câu 1:** Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $AB$ tại $A$ là một hình tam giác vuông cong $ACE$ với $AC = 4\,\text{m}$, $CE = 3,5\,\text{m}$ và cạnh cong $AE$ nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí $M$ là trung điểm của $AC$ thì tường cong có độ cao $1\,\text{m}$. Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.




**A.** $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn C**



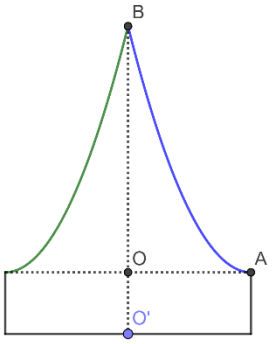

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O$

$\Rightarrow$ cạnh cong $AE$ nằm trên parabol $(P): y = ax^2 + bx$ đi qua các điểm $(2;1)$ và $\left(4;\frac{7}{2}\right)$ nên $(P): y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$

Khi đó diện tích tam giác cong $ACE$ có diện tích $S = \int_0^4 \left(\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right)\text{d}x = 5\,\text{m}^2$.

Vậy thể tích khối bê tông cần sử dụng là $V = 5.2 = 10\,\text{m}^3$.

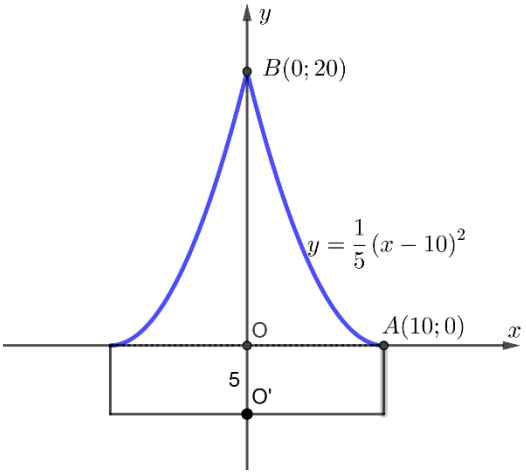
**Câu 2:** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong $AB$ là một phần của parabol có đỉnh là điểm $A$. Thể tích của chiếc mũ bằng




**A.** $\frac{2750\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta gọi thể tích của chiếc mũ là $V$.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là $V_1$.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $AB$ và hai trục tọa độ quanh trục $Oy$ là $V_2$.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh $A$ nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

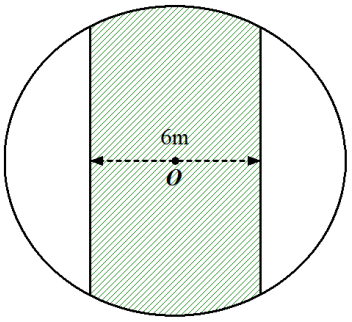
Vì $(P)$ qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$.

Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{dy} = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi \ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

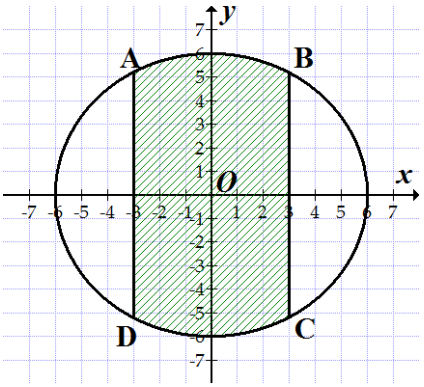
Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

**Câu 3:** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng/ $m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó?




**A.** $8\ 412\ 322$ đồng. **B.** $4\ 821\ 322$ đồng. **C.** $3\ 142\ 232$ đồng. **D.** $4\ 821\ 232$ đồng.

**Lời giải**




**Chọn B**

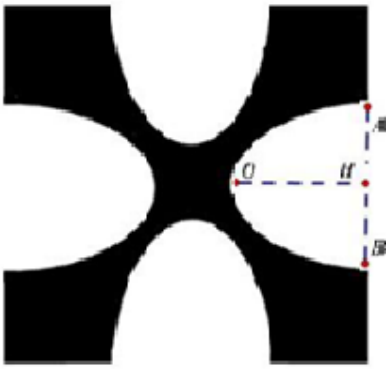
Đặt hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn $x^2+y^2=36 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{36-x^2}$.

Diện tích phần trồng cây: $S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{MTCT}{\rightarrow} A$

Số tiền cần để trồng cây là: $70000.A \approx 4\ 821\ 322$ đồng.

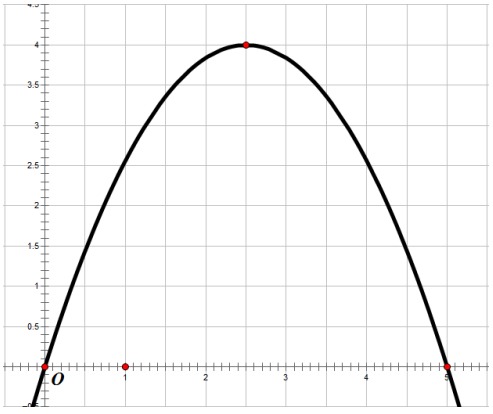
**Câu 4:** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng $10$ cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



**A.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$ **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$ **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$ **D.** $50\ \text{cm}^2$

**Lời giải**

**Chọn B**



Đưa parabol vào hệ trục $Oxy$ ta tìm được phương trình là: $(P): y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=5$ là: $S=\int_0^5\left(-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x\right)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1=4S=\frac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv}=100\ \text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2=S_{hv}-S_1=100-\frac{160}{3}=\frac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

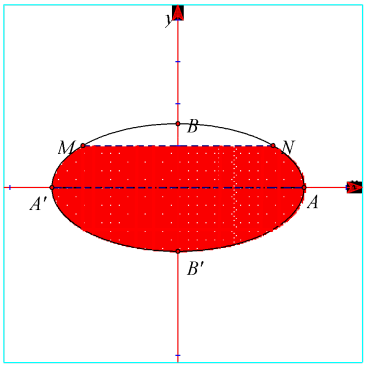
**Câu 5:** Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang là một đường elip có trục lớn bằng $1\text{m}$, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài bằng $3\text{m}$. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng. Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích $V$ của dầu có trong thùng.

**A.** $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi $M$, $N$ lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi $S_1$ là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{\pi}{5}$.

Gọi $S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng $MN$.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng là $0,6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng $MN$ là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm $M$, $N$ có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

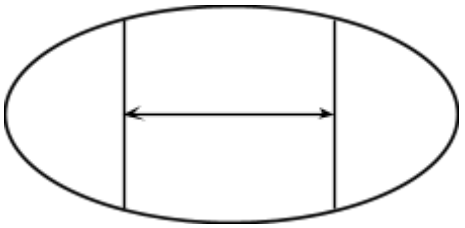
Đổi cận: Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

**Câu 6:** Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là $100.000$ đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?.




**A.** $7.862.000$ đồng. **B.** $7.653.000$ đồng. **C.** $7.128.000$ đồng. **D.** $7.826.000$ đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

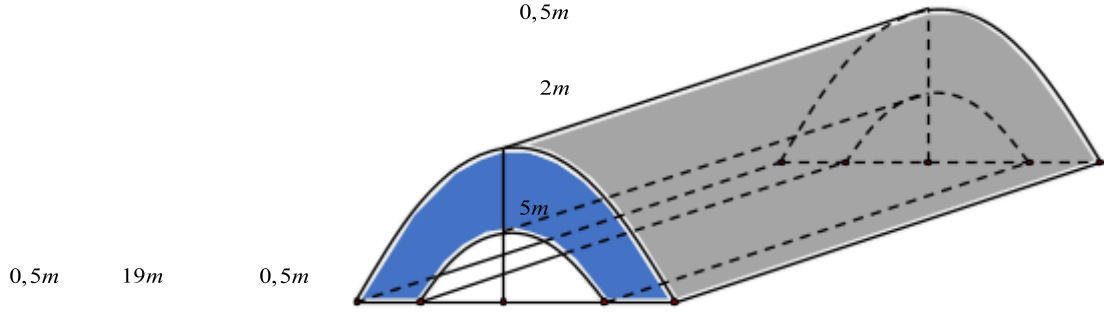
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\quad (E_1)\\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\quad (E_1)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1);(E_2);x=-4;x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

**Câu 7:** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu.




**A.** $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $40m^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

Ta có

Gọi $(P_1):y=ax^2+c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right),B(0;2)$

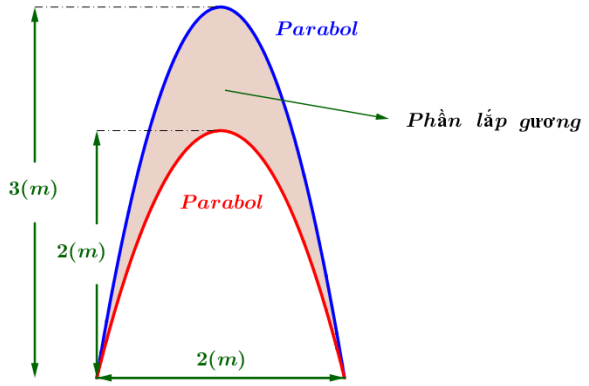
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$

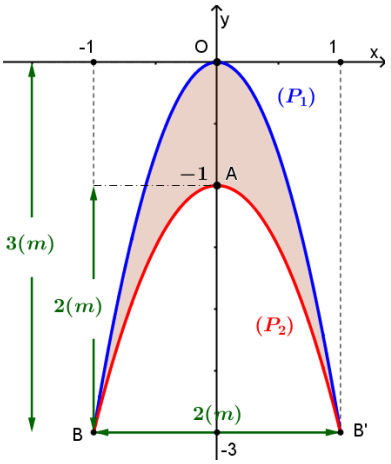
**Câu 8:** Một tòa nhà có $8$ cửa sổ vòm cần lắp một phần gương như hình minh họa ở bên. Biết kinh phí để lắp gương là $750.000$ đồng $/1m^2$. Hỏi chủ nhà cần bao nhiêu tiền để lắp gương cho các phần của $8$ cửa sổ?




**A.** $8.000.000$ đồng. **B.** $2.000.000$ đồng. **C.** $5.000.000$ đồng. **D.** $4.000.000$ đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**



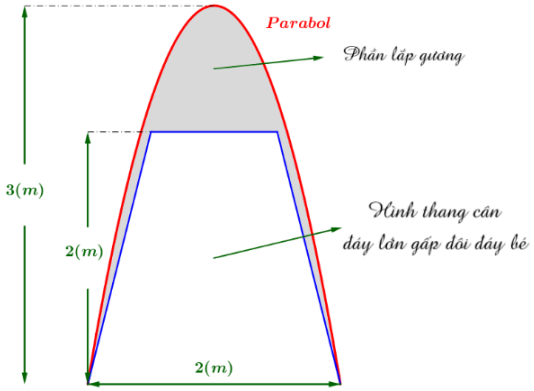
· Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ; $O(0;0),\ A(0;-1),\ B(-1;-3),\ B'(1;-3).$

· Phương trình hai parabol $(P_1): y=-3x^2,\ (P_2): y=-2x^2-1.$

· Diện tích phần lắp kính: $S=\int_{-1}^{1}\left|y_{P_1}-y_{P_2}\right|.dx=2.\int_{0}^{1}\left|x^2-1\right|.dx=\frac{4}{3}\left(m^2\right).$

· Vậy số tiền lắp gương cho các phần của $8$ cửa sổ bằng: $8.\frac{4}{3}.750000=8000000$ (đ).

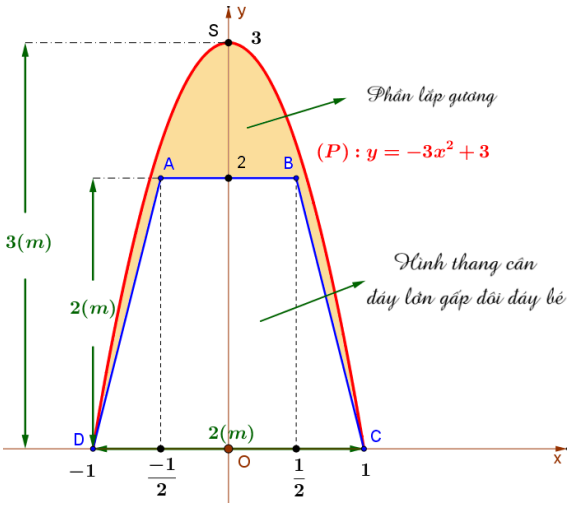
**Câu 9:** Một tòa nhà có $8$ cửa sổ vòm cần lắp một phần gương như hình minh họa ở bên. Biết kinh phí để lắp gương là $750.000$ đồng $/1m^2$. Hỏi chủ nhà cần bao nhiêu tiền để lắp gương cho các phần của $8$ cửa sổ?




**A.** $6.000.000$ đồng. **B.** $2.250.000$ đồng. **C.** $750.000$ đồng. **D.** $3.000.000$ đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

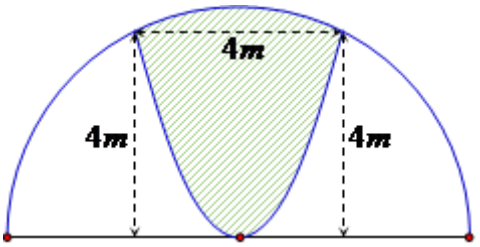



· Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ; $S(0;3),\ C(1;0),\ D(-1;0)\Rightarrow(P): y=-3x^2+3.$

· Diện tích phần lắp kính: $S=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right).dx-S_{ABCD}=4-\frac{1}{2}(2+1)2=1\left(m^2\right).$

· Vậy số tiền lắp gương cho các phần của $8$ cửa sổ bằng: $8.1.750000=6000000$ (đ).

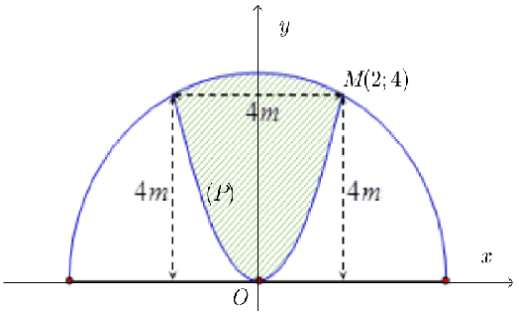
**Câu 10:** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng $4$ (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là $100.000$ đồng/m$^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)




**A.** $3.895.000$ (đồng). **B.** $1.948.000$ (đồng). **C.** $2.388.000$ (đồng). **D.** $1.194.000$ (đồng).

**Lời giải**

**Chọn B**




Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}$.

Phương trình parabol $(P)$ có đỉnh là gốc $O$ sẽ có dạng $y=ax^2$. Mặt khác $(P)$ qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4=a(-2)^2\Rightarrow a=1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và nửa đường tròn.( phần tô màu)

Ta có công thức $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx\cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco} = \frac{1}{2}S_{hinhtron} - S_1 \approx 19,47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo} \times 100000 \approx 1.948.000$ (đồng).đồng.