

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula los valores de a , b , c y d sabiendo que f verifica:

- El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la gráfica f
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1

Resolución

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; f''(x) = 6ax + 2b$$

Al ser $(0, 1)$ punto de inflexión, $f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ y como la gráfica pasa por el punto de inflexión, $f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \Rightarrow d = 1$. Nos queda $f(x) = ax^3 + cx + 1$, $f'(x) = 3ax^2 + c$

Como f tiene un mínimo local para $x = 1$, $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow c = -3a$. Luego, $f'(x) = 3ax^2 - 3a$

Como la recta tangente en $x = 2$ tiene pendiente 1, $f'(2) = 1 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 - 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$

Entonces, $c = -3a = -3 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$. Conclusión: $a = \frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$ y $d = 1$

2.- Considerar las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$.

a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas

b) Calcula el área de dicho recinto

Resolución

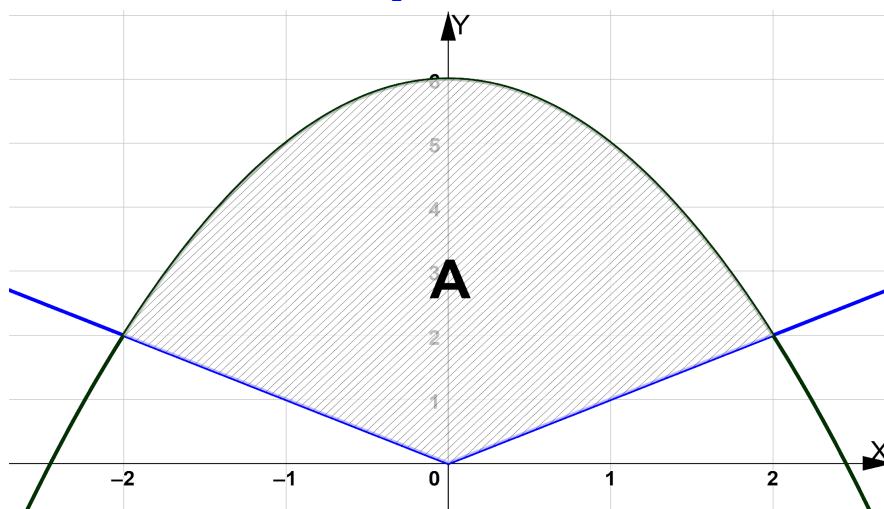
$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es continua y tiene como gráfica dos trozos de rectas, $y = -x$ para $x < 0$,

e $y = x$ para $x \geq 0$; la gráfica de $g(x)$ es la parábola cóncava de vértice $(0, 6)$

Los puntos de corte se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} y = |x| \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$

Si $x \geq 0 \rightarrow x = 6 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 2$. Punto $(2, 2)$

Si $x < 0 \rightarrow -x = 6 - x^2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = -2$. Punto $(-2, 2)$



Por simetría el área que se pide es $A = 2 \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = \int_0^2 (12 - 2x^2 - 2x) dx$

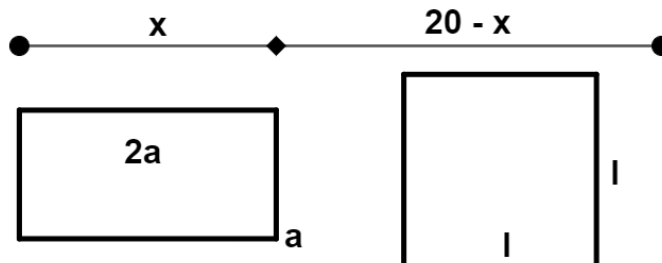
Una primitiva es $p(x) = 12x - \frac{2x^3}{3} - x^2 = \frac{36x - 2x^3 - 3x^2}{3}$

Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(0) = \frac{36 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2}{3} - \frac{36 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2}{3} = \frac{44}{3} \cong 14,67 \text{ u}^2$$

3.- Se divide un segmento de longitud $L = 20$ cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Resolución



El área de un rectángulo es base por altura y el área de un cuadrado de lado " l " es l^2 .

Como el perímetro del rectángulo es x , entonces $4a + 2a = x$. Luego, $a = \frac{x}{6}$.

$$A(\text{rectángulo}) = 2a \cdot a = 2a^2 = 2 \cdot \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{18}$$

El perímetro del cuadrado es $20 - x$, entonces $l = \frac{20 - x}{4}$;

$$A(\text{cuadrado}) = l^2 = \left(\frac{20 - x}{4} \right)^2 = \frac{400 - 40x + x^2}{16}$$

Función a minimizar: $f(x) = A(\text{rectángulo}) + A(\text{cuadrado}) = \frac{x^2}{18} + \frac{400 - 40x + x^2}{16}$

$$f'(x) = \frac{2x}{18} + \frac{2x - 40}{16} = \frac{16x + 18x - 360}{144} = \frac{34x - 360}{144} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{360}{34} = \frac{180}{17}$$

$$f''(x) = \frac{34}{144} > 0 ; \quad f''\left(\frac{180}{17}\right) = \frac{34}{144} > 0. \text{ Para } x = \frac{180}{17}, f(x) \text{ alcanza el mínimo.}$$

Por tanto, un trozo mide $\frac{180}{17} \cong 10,59 \text{ cm}$ y el otro, $20 - 10,59 = 9,41 \text{ cm}$

4.- La recta tangente a la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$ en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta $y = -x$

a) Determina las constantes m y n . Halla la ecuación de dicha recta tangente

Resolución

$f'(x) = 2mx + n$. La recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente -1 ,

$f'(1) = -1 \Rightarrow 2m \cdot 1 + n = -1 \Rightarrow 2m + n = -1$ y como la gráfica pasa por $(1, -6)$, entonces

$$f(1) = -6 \Rightarrow m \cdot 1^2 + n \cdot 1 - 3 = -6 \Rightarrow m + n = -3.$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 2m + n = -1 \\ m + n = -3 \end{cases}$. Restando las ecuaciones, $m = 2$ y $2 + n = -3$, $n = -5$

Conclusión: $m = 2$, $n = -5$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = -1$, $f(x_0) = f(1) = -6$

La recta tangente es $rtg: y = -(x - 1) - 6$; $rtg: y = -x - 5$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas

Resolución

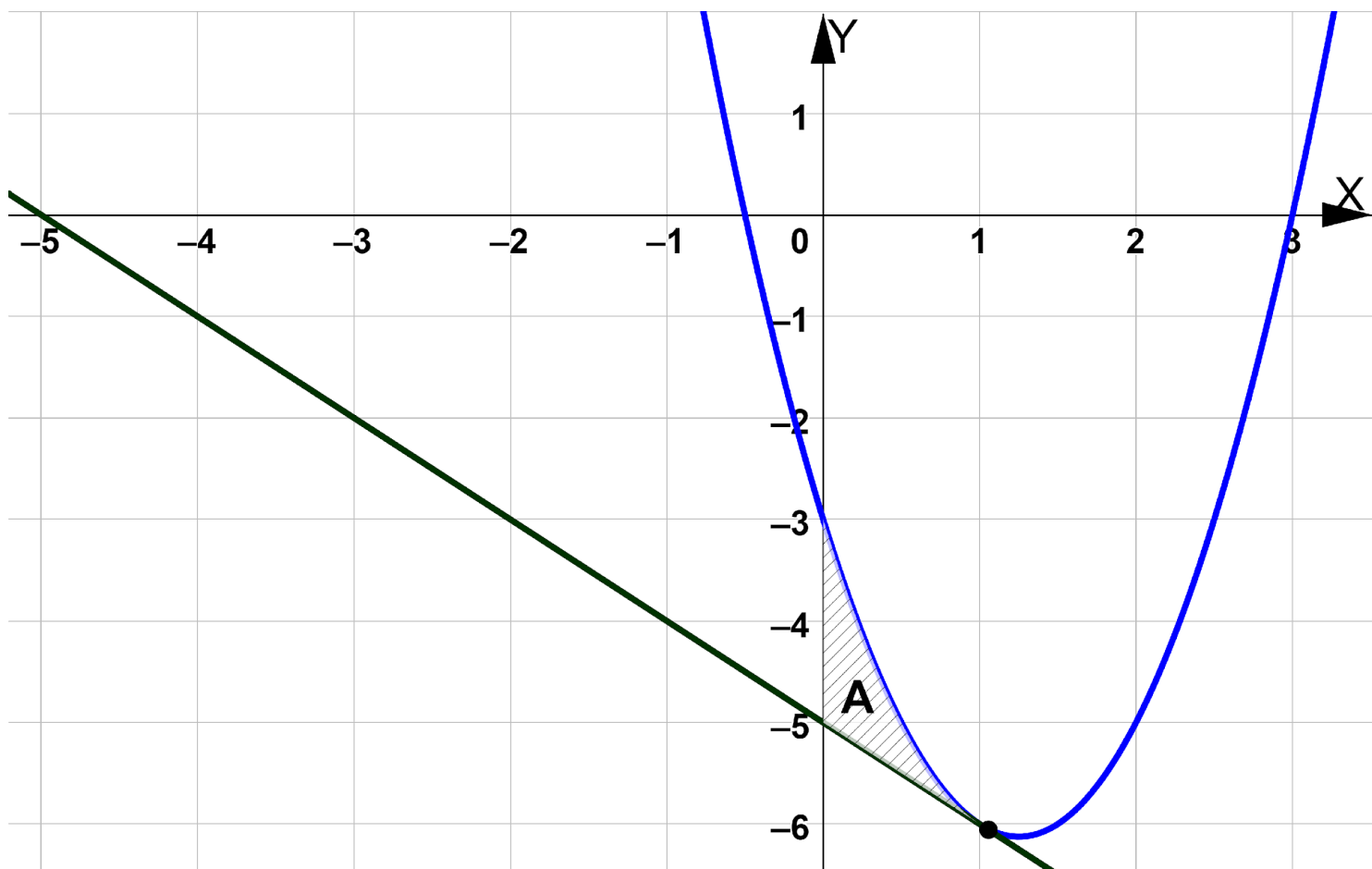
$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, $rtg: y = -x - 5$, eje de ordenadas: $x = 0$

$f'(x) = 4x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{4}$. El mínimo (vértice de la parábola) está en $x = \frac{5}{4}$

$2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4}$, $x = 3$, $x = -\frac{1}{2}$. La parábola corta al eje X en $(3, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$

Como $f(0) = -3$, la parábola corta al eje Y en $(0, -3)$

La recta tangente pasa por el punto de tangencia $(1, -6)$ y corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(-5, 0)$ y $(0, -5)$.



El área que se pide es $A = \int_0^1 (2x^2 - 5x - 3 + x + 5) dx = \int_0^1 (2x^2 - 4x + 2) dx$.

Una primitiva es $p(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(1) - p(0) = \frac{2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1}{3} - \frac{2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0}{3} = \frac{2}{3} \cong 0,67 \text{ u}^2$$

5.- (prueba extraordinaria) Se considera la función $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$. Determina la asíntota de la gráfica.

Resolución

Al ser f continua en $[1, +\infty)$ no hay asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$ tampoco hay asíntota horizontal

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} + \frac{x}{x} \right) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$[f(x) - mx] = \left(\sqrt{x^2 - x} + x - 2x \right) = \left(\sqrt{x^2 - x} - x \right)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} + \frac{x}{x}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{-1}{2}. \text{ Luego, la asíntota oblicua en } +\infty \text{ es la recta de ecuación AO: } y = 2x - \frac{1}{2}$$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota en $+\infty$:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asintota}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} < 0. \text{ Luego, la gráfica está "por debajo" de la asíntota en } +\infty$$

6.- (prueba extraordinaria) La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide el rectángulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$ y $D = (0, 1)$ en dos recintos.

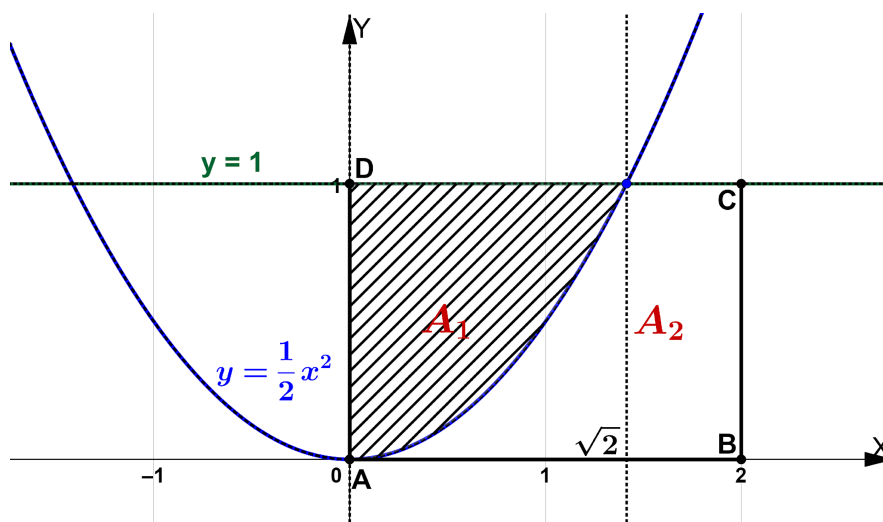
a) Dibujar dichos recintos

b) Hallar el área de cada uno de ellos

Resolución

El punto de corte de la parábola y la recta $y = 1$, del I cuadrante, se obtiene resolviendo el sistema

$$\{y = 1 \quad y = \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad ; \quad x^2 = 2 \quad ; \quad x = \sqrt{2} \quad , \text{ punto } (\sqrt{2}, 1)$$



$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} = \frac{6x - x^3}{6}$$

Por la regla de Barrow

$$A_1 = p(\sqrt{2}) - p(0) = \frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} - \frac{6 \cdot 0 - 0^3}{6} = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cong 0,943 \text{ u}^2$$

$$A_2 = A(\text{rectángulo}) - A_1 = 2 \cdot 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} \cong 1,057 \text{ u}^2$$

7.- (prueba extraordinaria) De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2 , determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud

Resolución

Si x , y son las dimensiones del rectángulo como $xy = 16$, entonces $y = \frac{16}{x}$

Si d es la diagonal, por el teorema de Pitágoras, $d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}$

Función a minimizar: $f(x) = \text{diagonal} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x - \frac{512}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} = \frac{x^4 - 256}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 256 = 2^8 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2^8} = 4$$

Si $x < 4 \Rightarrow x^4 < 4^4 = 256 \Rightarrow f'(x) < 0$ (f es decreciente)

Si $x > 4 \Rightarrow x^4 > 4^4 = 256 \Rightarrow f'(x) > 0$ (f es creciente)

Luego, en $x = 4$, f tiene el mínimo. En este caso, $y = \frac{16}{4} = 4$.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 4 cm y 4 cm. En realidad es un cuadrado de 4 cm de lado.

8.- (prueba extraordinaria) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$. Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencia: Utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$)

Resolución

Si F es una primitiva de f , entonces $F(x) = \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - 9x^4}}$. Haciendo el cambio $t = \frac{3}{2}x^2$, $x^2 = \frac{2}{3}t$

$$x^4 = \frac{4}{9}t^2, 4 - 9x^4 = 4 - 9 \cdot \frac{4}{9}t^2 = 4(1 - t^2), dt = \frac{3}{2}x dx, x dx = \frac{2}{3} dt.$$

Sustituyendo, $F(x) = \int \frac{\frac{2}{3} dt}{\sqrt{4(1-t^2)}} = \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{4}{3} \arcsen t + k = \frac{4}{3} \arcsen \left(\frac{3}{2} x^2 \right) + k$

Como $F(0) = 3$, entonces $\frac{4}{3} \arcsen \left(\frac{3}{2} 0^2 \right) + k = 3 \Rightarrow k = 3$

Luego, la primitiva que se busca es $F(x) = \frac{4}{3} \arcsen \left(\frac{3}{2} x^2 \right) + 3$

9.- (prueba ordinaria) Calcula el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right]$

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right] = (\pm\infty - \pm\infty \text{ indeterminación.}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x}{\ln(x^2 - 1) \ln x} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación.}$$

Veamos si podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{2x - \frac{2}{x}}{2x \ln x + (x^2 - 1) \frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 2}{2x^2 \ln x + x^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Veamos si podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{4x}{4x \ln x + 2x + 2x} = \frac{4x}{4x(\ln x + 1)} = 1$$

Se puede aplicar. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right] = 1$.

10.- (prueba ordinaria) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 1|$.

(a) Esboza la gráfica de f .

Resolución

$f(x) = x|x - 1| = \{x(-x + 1), \text{ si } x < 1; x(x - 1), \text{ si } x \geq 1\} = \{x - x^2, \text{ si } x < 1; x^2 - x, \text{ si } x \geq 1\}$
es continua

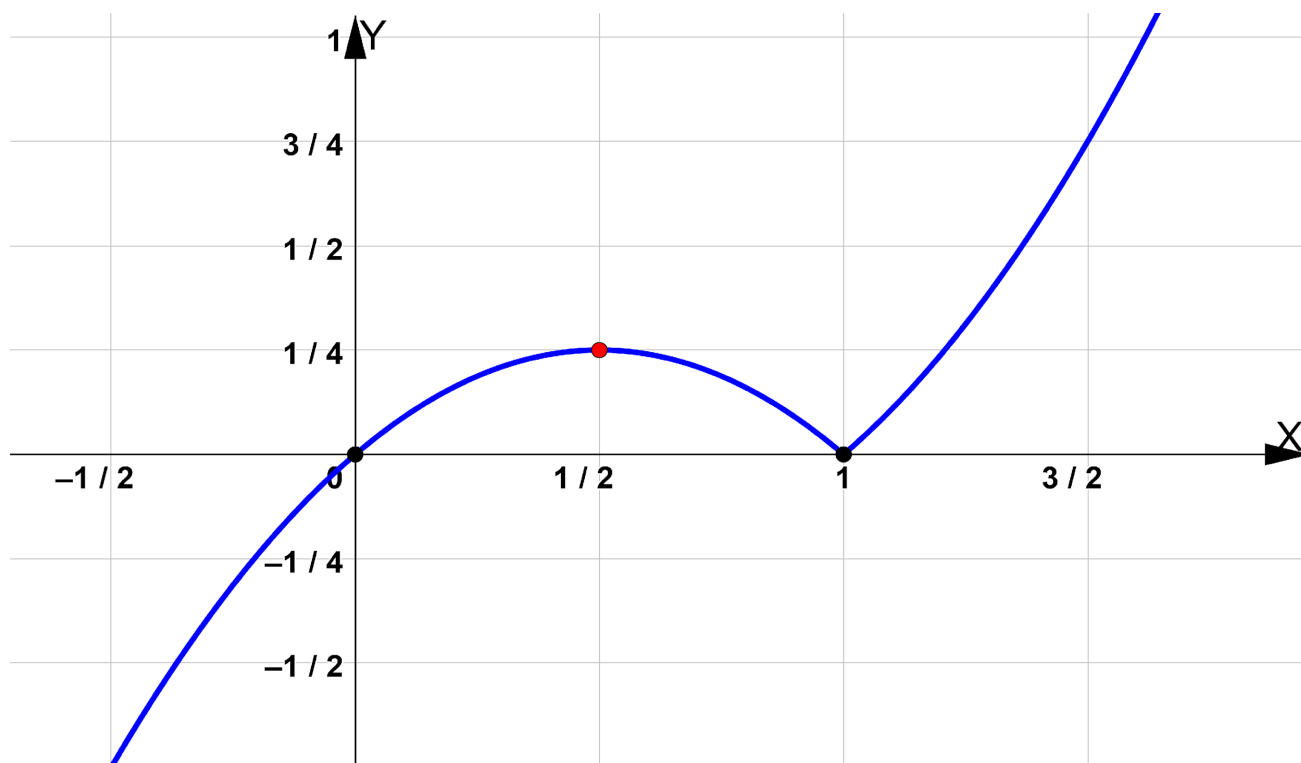
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$. La gráfica corta al eje X en (0, 0) y (1, 0)

Para $x \neq 1$,

$f'(x) = \{1 - 2x, \text{ si } x < 1; 2x - 1, \text{ si } x > 1\}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \{x = \frac{1}{2}, x < 1; x = \frac{1}{2}, x > 1\}$ (imposible)

Como para $x < 1$, $f''(x) = -2$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$ en $x = \frac{1}{2}$ hay un máximo relativo

Al ser $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ el máximo relativo es $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



(b) Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 0$.

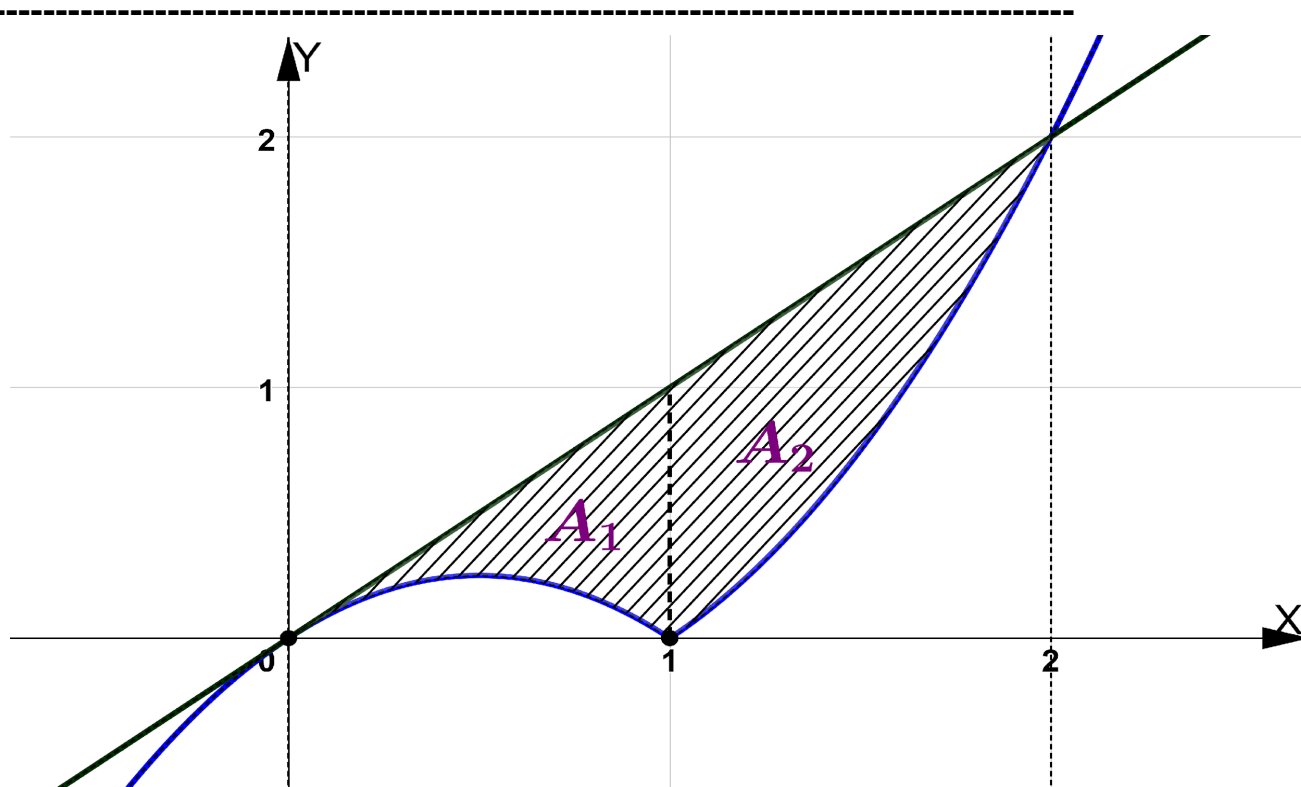
Como para $x < 1$, $f'(x) = 1 - 2x$, entonces $f'(x_0) = f'(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$; $f(x_0) = f(0) = 0$.

La recta tangente es $rtg: y = 1(x - 0) + 0$; $rtg: y = x$

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Resolución

Los puntos de corte de la gráfica de f con la tangente se obtienen resolviendo la ecuación $x|x - 1| = x$ cuyas soluciones son $x = 0$, $x = 2$. Los puntos son $(0, 0)$ y $(2, 2)$



El área que se pide, es $A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_0^1 [x - (x - x^2)] dx = \int_0^1 x^2 dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(1) - p(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 [x - (x^2 - x)] dx = \int_1^2 (2x - x^2) dx.$$

$$\text{Una primitiva de la función integrando es } p(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - x^3}{3}$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_2 = p(2) - p(1) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2 - 1^3}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego, el área que se pide es } A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \text{ u}^2$$

11.- (prueba ordinaria) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

Resolución

- Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0-1} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 1 = -1; \quad f(0) = -1. \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = 0$$

$$\text{Para } x \neq 0, f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 - 3 = -3. \text{ Luego, } f \text{ NO es derivable en } x = 0$$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

(b) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

Resolución

Al ser f continua en $\mathbb{R}$ no hay asíntotas verticales.

Como para $x > 0$, f es una función cuadrática tampoco hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow f \text{ tiene asíntota horizontal en } -\infty, \text{ cuya ecuación es A.H. : } y = 0 \text{ (eje X)}$$

$$f_{\text{máx}} - f_{\text{mín}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{cuando } x \rightarrow -\infty$$

Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

$$\text{Como } f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0, x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

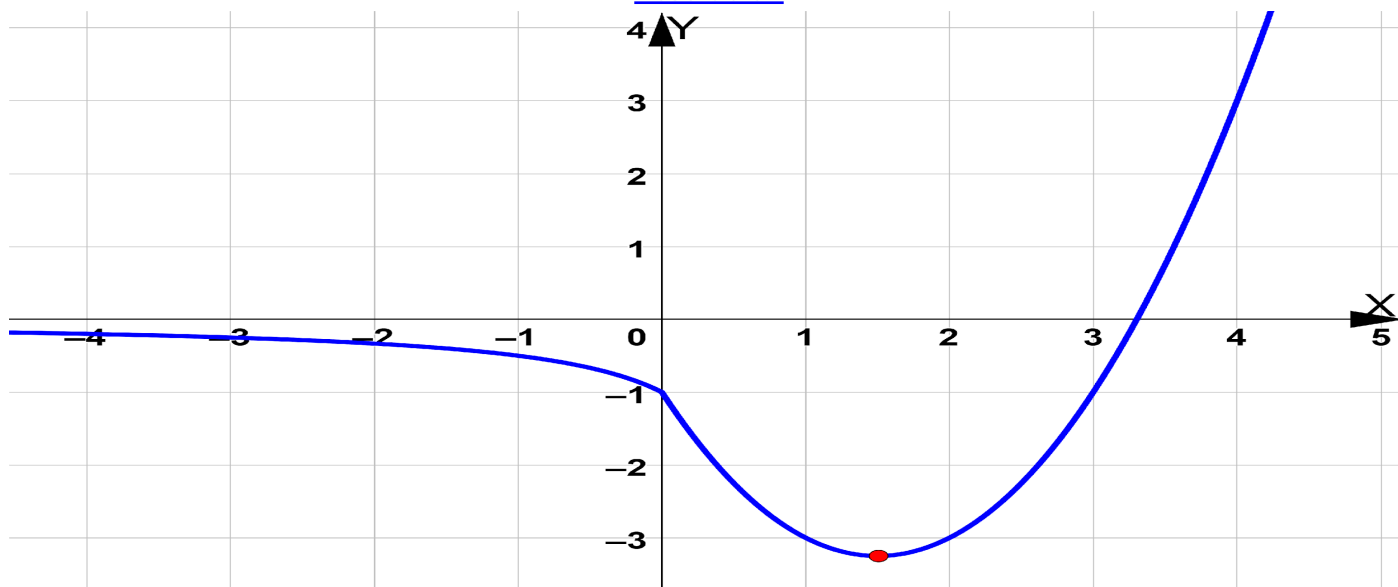
Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	decreciente		decreciente	mínimo	creciente

f sólo tiene mínimo relativo: $x = \frac{3}{2}$, $y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{-13}{4}$. El mínimo relativo es $M\left(\frac{3}{2}, \frac{-13}{4}\right)$

(c) Esboza la gráfica de f .

Resolución



12.- (prueba ordinaria) Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

Resolución

Sea $f(x) = x^3 - 3x$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = -1$. Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, entonces

$$f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0 ; f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

La recta tangente es $rtg: y = 0(x + 1) + 2 ; rtg: y = 2$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$$

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3} ; x = 0, y = f(0) = 0.$$

La curva corta a los ejes en $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

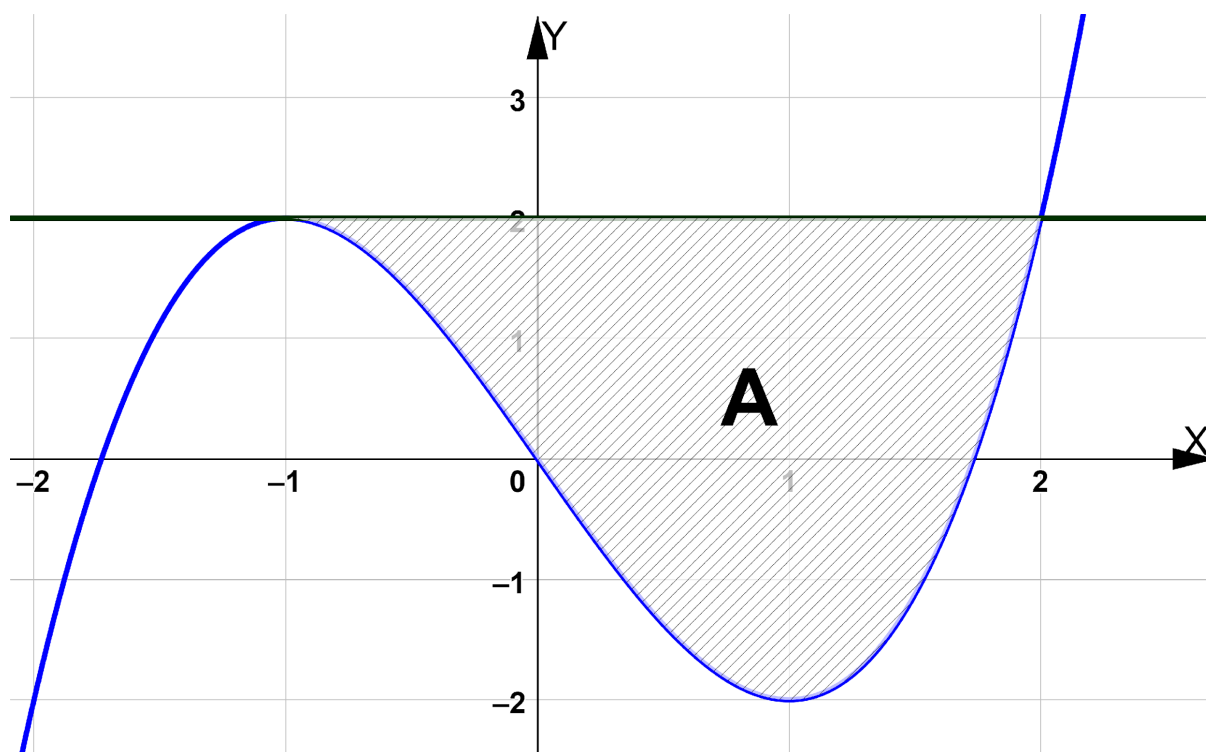
El máximo es $x = -1, y = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, M(-1, 2)$

El mínimo es $x = 1, y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2, N(1, -2)$; $y = 2$ es la horizontal que pasa por $(0, 2)$

Los puntos de corte de la curva con la recta se obtienen resolviendo el sistema $\{y = 2, y = x^3 - 3x\}$

$x^3 - 3x = 2, x^3 - 3x - 2 = 0$. Usamos la regla de Ruffini: $\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$
; $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$

Resolviendo: $x = -1 ; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}, x = 2, x = -1$. Puntos: $(2, 2)$ y $(-1, 2)$



El área que se pide es $A = \int_{-1}^2 [2 - (x^3 - 3x)] dx = \int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) dx$.

Una primitiva es $p(x) = 2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} = \frac{8x - x^4 + 6x^2}{4}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(-1) = \frac{8 \cdot 2 - 2^4 + 6 \cdot 2^2}{4} - \frac{8(-1) - (-1)^4 + 6(-1)^2}{4} = 6 - \frac{-3}{4} = \frac{27}{4} = 6,75 u^2$$

13.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 |x + 3|$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f .

Resolución

f es continua en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-x-3), & \text{si } x < -3 \\ x^2(x+3), & \text{si } x \geq -3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 - 3x^2, & \text{si } x < -3 \\ x^3 + 3x^2, & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

Si $x \neq -3$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables siendo

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 6x, & \text{si } x < -3 \\ 3x^2 + 6x, & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) = -3(-3)^2 - 6(-3) = -9 \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = 3(-3)^2 + 6(-3) = -45.$$

Luego, f NO es derivable en $x = -3$. Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3\}$

(b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f . Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Resolución

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 6x = -3x(x+2) = 0, & x < -3 \\ 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0, & x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, & x < -3 \\ x = 0, & x > -3 \end{cases}$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-3, 0)$

máximo relativo: $x = -3$, $y = f(-3) = (-3)^2 |-3 + 3| = 0$, $M(-3, 0)$

mínimo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 |0 + 3| = 0$, $M(0, 0)$

14.- Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \ln(x)$

a) Comprueba que la recta de ecuación $y = 1 + \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = e$, $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{e}$

$f(x_0) = f(e) = 1 + \ln \ln e = 2$. La recta tangente es rtg: $y = \frac{1}{e}(x - e) + 2$; rtg: $y = 1 + \frac{1}{e}x$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a)

Resolución

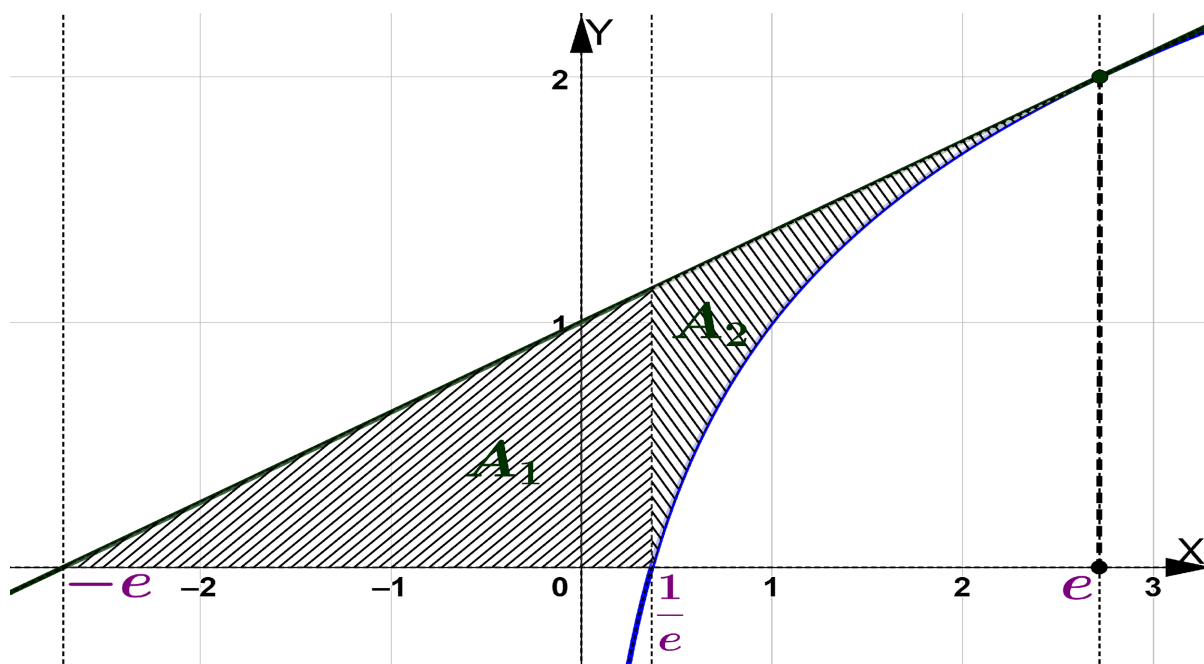
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \infty = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$, con lo que f tiene la A.V.: $x = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$. Por tanto, la gráfica de f corta al eje de abscisas en el punto $(\frac{1}{e}, 0)$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Luego, para $x > 0$, $f'(x) > 0$ y f es creciente mientras que para $x < 0$, $f'(x) < 0$ y f es decreciente.

La recta tangente pasa por el punto de tangencia, $(e, 2)$ y por el punto $(0, 1)$.

Como $0 = 1 + \frac{1}{e}x \Leftrightarrow x = -e$, la recta tangente corta al eje de abscisas en $(-e, 0)$



El área que se pide, es $A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-e}^{1/e} (1 + \frac{1}{e}x) dx$. Una primitiva de la función integrando es $p(x) = x + \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} = \frac{2ex + x^2}{2e}$

Por la regla de Barrow, $A_1 = p(1/e) - p(-e) = \frac{2e \cdot \frac{1}{e} + (\frac{1}{e})^2}{2e} - \frac{2e(-e) + (-e)^2}{2e} = \frac{2 + \frac{1}{e^2}}{2e} - \frac{-2e^2 + e^2}{2e}$

$$A_1 = \frac{2e^2 + 1}{2e^3} - \frac{-e^2}{2e} = \frac{2e^2 + 1 + e^4}{2e^3};$$

$$A_2 = \int_{1/e}^e [1 + \frac{1}{e}x - (1 + \ln \ln x)] dx = \int_{1/e}^e (\frac{1}{e}x - \ln \ln x) dx.$$

$$\left[u = \ln \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow$$

$$\int \ln \ln x \, dx = x \ln \ln x - \int 1 \, dx = x \ln \ln x - x = x(\ln \ln x - 1) + k$$

Una primitiva de la función integrando es $q(x) = \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} - x(\ln \ln x - 1) = \frac{x^2 - 2ex(\ln \ln x - 1)}{2e}$

Por la regla de Barrow,

$$A_2 = q(e) - q(1/e) = \frac{e^2 - 2ee(\ln \ln e - 1)}{2e} - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 2e\frac{1}{e}(\ln \ln \frac{1}{e} - 1)}{2e} = \frac{e^2}{2e} - \frac{\frac{1}{e^2} + 4}{2e}$$

$$A_2 = \frac{e}{2} - \frac{4e^2 + 1}{2e^3} = \frac{e^4 - 4e^2 - 1}{2e^3}. \text{ Luego,}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2e^2 + 1 + e^4 + e^4 - 4e^2 - 1}{2e^3} = \frac{2e^4 - 2e^2}{2e^3} = \frac{e^2 - 1}{e} \cong 2,35 u^2$$

15.- Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x(\ln \ln x)^2}{(x-1)^2}, & \text{si } x \neq 1 \\ a, & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Sabiendo que f es continua, calcula a .

Resolución

Para $x \neq 1$, f es continua independientemente del valor de " a " por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Como es continua en $x = 1$: $a = f(1) = f(x) = \frac{xx}{(x-1)^2} = \frac{11}{(1-1)^2} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[xx]'}{[(x-1)^2]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1.x + x.2\ln \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\ln \ln x}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$

Indeterm.

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x + 2\ln \ln x]'}{[2(x-1)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\ln \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{2} = \frac{2\ln \ln 1 \cdot \frac{1}{1} + \frac{2}{1}}{2} = 1$

$$\Rightarrow a = 1$$

b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Resolución

$f(x) = \frac{xx}{(x-1)^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[xx]'}{[(x-1)^2]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1.x + x.2\ln \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\ln \ln x}{2(x-1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterm. Volvemos a aplicar la regla

de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x + 2\ln \ln x]'}{[2(x-1)]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln \ln x + 2}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminación.

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\ln \ln x + 2]'}{[2x]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Luego, por la regla de L'Hôpital, $f(x) = 0$ y la asíntota horizontal es A.H. : $y = 0$ (eje X)

16.- Se consideran las funciones $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

a) Haz un esbozo de sus gráficas

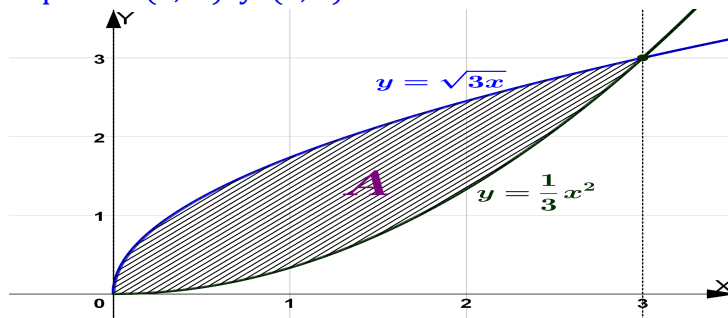
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones.

Resolución

Los puntos de corte de las gráficas se obtienen resolviendo el sistema $\{y = \sqrt{3x} \quad y = \frac{1}{3}x^2\}$

$$\frac{1}{3}x^2 = \sqrt{3x} \quad ; \quad \frac{x^4}{9} = 3x \quad ; \quad x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = 0 \quad ; \quad x = 0, y = 0 \quad ; \quad x = 3, y = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$$

Las gráficas se cortan en los puntos (0, 0) y (3, 3)



El área que se pide es $A = \int_0^3 (\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2) dx = \int_0^3 (\sqrt{3} x^{1/2} - \frac{1}{3}x^2) dx$.

Una primitiva es $p(x) = \frac{\sqrt{3} x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} = \frac{2\sqrt{3}x^3}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{6\sqrt{3}x^3 - x^3}{9}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(3) - p(0) = \frac{6\sqrt{3 \cdot 3^3} - 3^3}{9} - \frac{6\sqrt{3 \cdot 0^3} - 0^3}{9} = \frac{27}{9} - 0 = 3$$

17.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + a + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 5x + b, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, es derivable.

Determina los valores de a y b.

Resolución

Al ser derivable, en particular es derivable en $x = 1$.

Para $x \neq 1$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como es continua en $x = 1$, $f(x) = f(x) \Rightarrow -1 + b + 1 = a - 5 + 2a \Rightarrow 3a - b = 5$

Si $x < 1$, $f'(x) = (-x^2 + bx + 1)' = -2x + b$; Si $x > 1$, $f'(x) = (ax^2 - 5x + 2a)' = 2ax - 5$

Como es derivable en $x = 1$: $f'(x) = f'(x) \Rightarrow -2 + b = 2a - 5 \Rightarrow 2a - b = 3$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 3a - b = 5 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$. Restando las ecuaciones, $a = 2$. Luego, $b = 2a - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Conclusión: debe ser $a = 2$, $b = 1$

18.-

a) Calcula $\int x \sen(x) dx$

Resolución

Usamos el método de integración por partes: $[u = x \quad dv = dx \quad v = x \quad du = dx]$

$$\int x \sen x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \cos x + \int \cos x dx = x \cos x + \sen x + k$$

b) Sean las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$. Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas

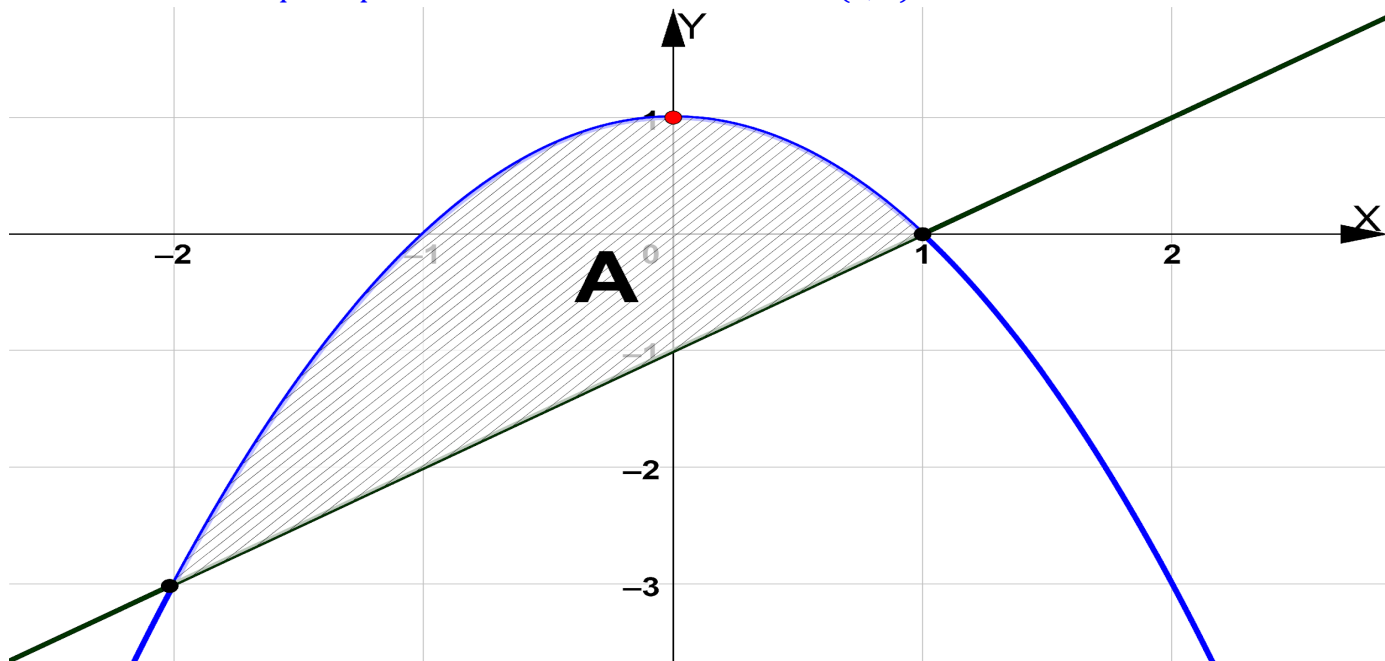
Resolución

Los puntos de corte entre la recta y la parábola se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 1 = x - 1; x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm 3}{2}, x = 1, y = 0, x = -2, y = -3. \text{ Puntos de corte: } (1, 0) \text{ y } (-2, -3)$$

Observamos además que la parábola es cóncava con vértice en $(0, 1)$



$$\text{El área que se pide es } A = \int_{-2}^1 [-x^2 + 1 - (x - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 12x}{6}$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A = p(1) - p(-2) = \frac{-2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1}{6} - \frac{-2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 12(-2)}{6}$$

$$A = \frac{7}{6} - \frac{-20}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2$$

19.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene extremos relativos en $(0, 0)$ y $(2, 2)$. Calcula a , b , c y d .

Resolución

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Como f tiene un extremo relativo en $(0, 0)$ entonces $f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

y por pasar por $(0, 0)$ tenemos que $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

Sustituyendo obtenemos la función $f(x) = ax^3 + bx^2$

Como f tiene otro extremo relativo en $(2, 2)$ entonces $f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$.

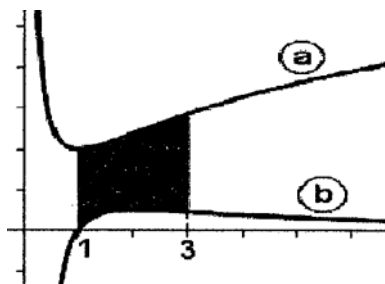
y por pasar por $(2, 2)$ tenemos que $f(2) = 2 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow 8a + 4b = 2$.

Nos queda el sistema

$$\begin{cases} 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 2a + b = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones, $a = \frac{-1}{2}; b = -3a = -3 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}$. Conclusión: $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = d = 0$

20.- Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \ln \ln(x)$ y a la de su derivada $f': (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f' .

Resolución Como $f(1) = \frac{2}{1} + 2 \ln \ln 1 = 2$, la gráfica de f es la “a” y, por tanto, la gráfica de f' es la “b”.

b) Calcula el área de la región sombreada.

Resolución

Como la gráfica de f está “por encima de la de f' ” el área que se pide es $A = \int_1^3 [f(x) - f'(x)] dx$

$$\text{Sea } \int [f(x) - f'(x)] dx = \int f(x) dx - \int f'(x) dx = \int \left(\frac{2}{x} + 2 \ln \ln x \right) dx - f(x)$$

Hallemos $\int \ln \ln x dx$ usando el método de integración por partes

$$\left[u = \ln \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \right] \Rightarrow \int \ln \ln x dx = x \ln \ln x - \int 1 dx = x \ln \ln x - x = x(\ln \ln x - 1) + k$$

$$\text{Una primitiva de } f(x) - f'(x) \text{ es } p(x) = 2 \ln \ln x + 2x(\ln \ln x - 1) - \frac{2}{x} - 2 \ln \ln x = \frac{2x^2(\ln \ln x - 1) - 2}{x}$$

Por la regla de Barrow,

$$A = p(3) - p(1) = \frac{2 \cdot 3^2(\ln \ln 3 - 1) - 2}{3} - \frac{2 \cdot 1^2(\ln \ln 1 - 1) - 2}{1} = \frac{18 \ln \ln 3 - 20}{3} - (-4) = \frac{18 \ln \ln 3 - 8}{3} \cong 3,93 u^2$$

21.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , así como los extremos relativos o locales de f .

Resolución

f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Además, $f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$

Mínimo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = 0 + e^0 = 1$. El mínimo relativo es $M(0, 1)$

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Resolución $f''(x) = e^{-x} > 0$. Luego, f es convexa

c) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

Resolución

Como f es continua en $\mathbb{R}$ no tiene asíntotas verticales.

$f(x) = +\infty + 0 = +\infty \Rightarrow$ f No tiene asíntota horizontal en $+\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + e^{-x}}{x} = \left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$[f(x) - mx] = (x + e^{-x} - x)e^{-x} = 0$$

Luego, la asíntota oblicua en $+\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota en $+\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = e^{-x} > 0$

Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

$$f(x) = f(-x) = (e^x - x) = \frac{(e^x - x)(e^x + x)}{e^x + x} = \frac{e^{2x} - x^2}{e^x + x}$$

$$= \frac{\frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x}}}{\frac{e^x + x}{e^{2x}}} = \frac{1 - \frac{x^2}{e^{2x}}}{\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^{2x}}}. \text{ Dado que la exponencial es un infinito de orden superior a } x^2 \text{ y a } x$$

El límite vale $\frac{1-0}{0+0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Luego, f tiene NO asíntota horizontal en $-\infty$.

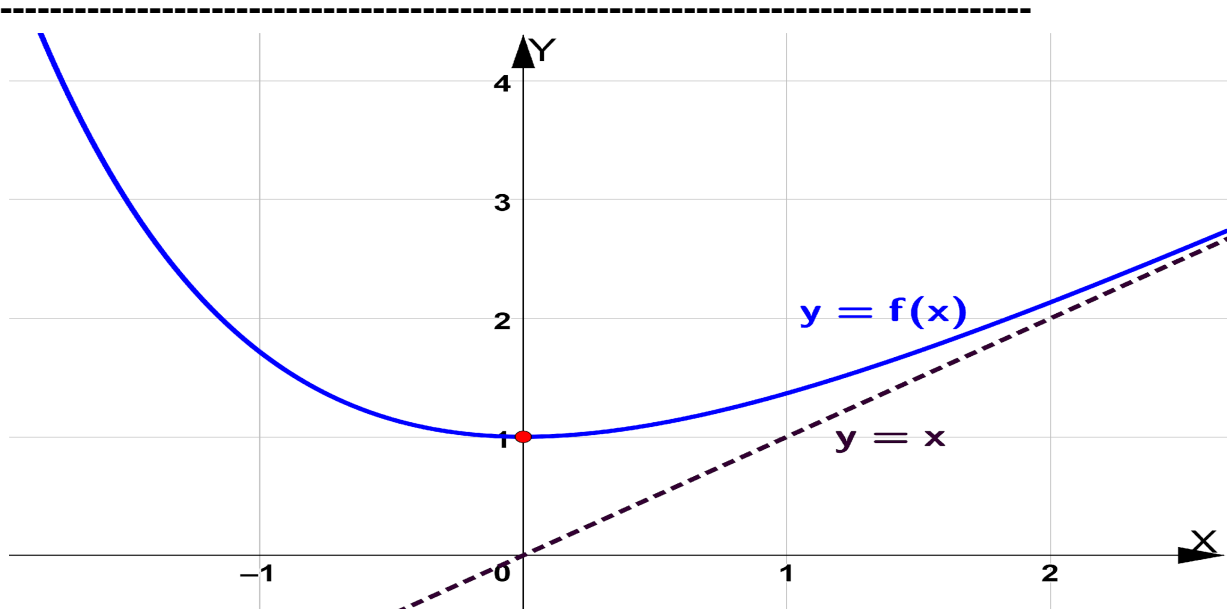
Veamos si tiene asíntota oblicua en $-\infty$, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-x + e^x}{-x} = \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = 1 - \infty = -\infty.$$

Luego, f tampoco tiene asíntota oblicua en $-\infty$.

d) Esboza la gráfica de f.

Resolución



22.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + |x|$, $g(x) = 2$

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza dichas gráficas.

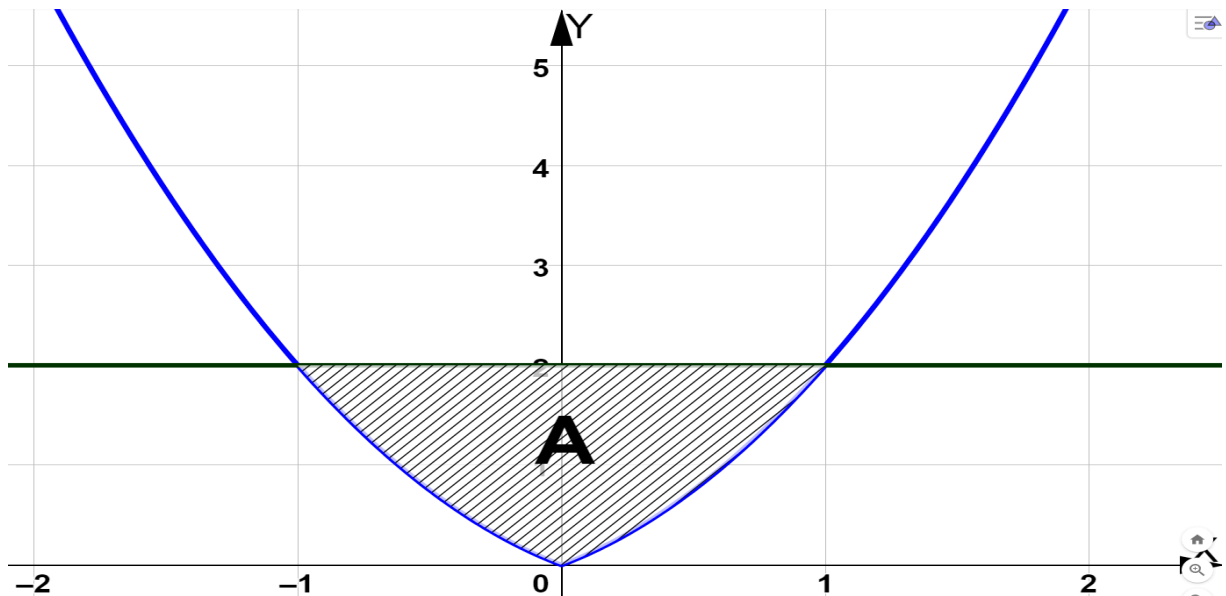
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas

Resolución

Los puntos de corte se obtienen resolviendo el sistema $\{y = x^2 + |x|, y = 2\}$

Si $x \geq 0 \rightarrow 2 = x^2 + x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow x = 1$. Punto $(1, 2)$

Si $x < 0 \rightarrow 2 = x^2 - x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow x = -1$. Punto $(-1, 2)$



Por simetría el área que se pide es $A = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx = \int_0^1 (4 - 2x^2 - 2x) dx$

Una primitiva es $p(x) = 4x - \frac{2x^3}{3} - x^2 = \frac{12x - 2x^3 - 3x^2}{3}$

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{12 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2}{3} - \frac{12 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2}{3} = \frac{7}{3} \cong 2,33 u^2$

23.- De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm, ¿qué base tiene el de área máxima?

Resolución

Si x es la base e y la altura, $x + y = 20$. Luego, $y = 20 - x$

Función a maximizar: $f(x) = A(\text{triángulo}) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (20 - x)}{2} = \frac{20x - x^2}{2}$

$$f'(x) = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

$$f''(x) = -1; f''(10) = -1 < 0. \text{ En } x = 10 \text{ se alcanza el máximo; } y = 20 - 10 = 10$$

Por tanto, tanto la base como la altura del triángulo miden 10 cm

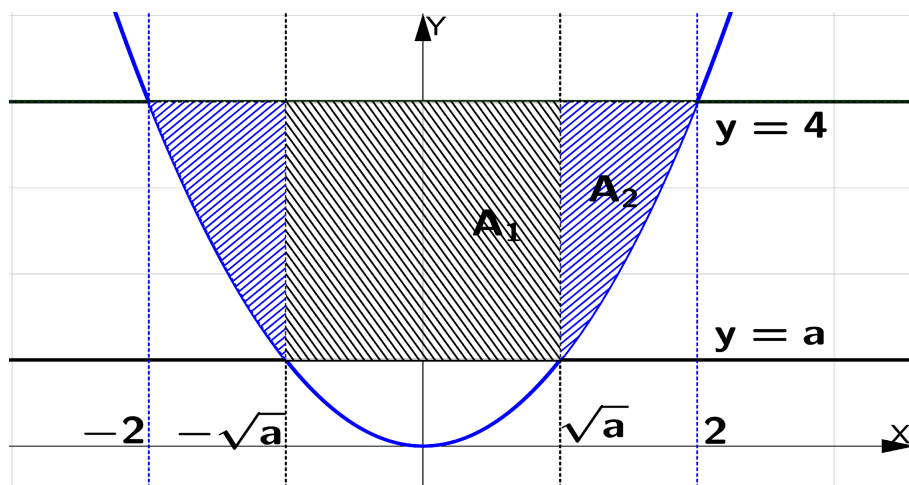
24.- Calcula un número positivo a , menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$, $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Resolución

Los puntos de corte de la parábola con las rectas se obtienen resolviendo

$$\{y = 4, y = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2. \text{ Puntos } (2, 4) \text{ y } (-2, 4)$$

$$\{y = a, y = x^2 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}. \text{ Puntos } (\sqrt{a}, a) \text{ y } (-\sqrt{a}, a)$$



Por simetría, el área es $\frac{28}{3} = A = 2(A_1 + A_2)$

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{a}} (4 - a) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = (4 - a)x$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(\sqrt{a}) - p(0) = (4 - a)\sqrt{a} - (4 - a)0 = (4 - a)\sqrt{a}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{a}}^2 (4 - x^2) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } q(x) = 4x - \frac{x^3}{3} = \frac{12x - x^3}{3}$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_2 = q(2) - q(\sqrt{a}) = \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{3} - \frac{12(\sqrt{a}) - (\sqrt{a})^3}{3} = \frac{16 - (12 - a)\sqrt{a}}{3}$$

$$\text{Luego, } \frac{28}{3} = 2(A_1 + A_2) = (8 - 2a)\sqrt{a} + \frac{32 - (24 - 2a)\sqrt{a}}{3} = \frac{(24 - 6a)\sqrt{a} + 32 - (24 - 2a)\sqrt{a}}{3} = \frac{32 - 4\sqrt{a}^3}{3}$$

Por tanto, $32 - 4\sqrt{a^3} = 28 \Rightarrow 4\sqrt{a^3} = 4 \Rightarrow a^3 = 1$. De donde, debe ser $a = 1$.