

Chapitre 2: Algèbre binaire

Pour manipuler les expressions binaires on utilise l'algèbre binaire comme outil mathématique. Cette algèbre est un cas particulier de l'algèbre de Boole.

1.1 Définition et axiomes

Une algèbre est un ensemble E muni de deux opérations T et T'.

L'algèbre de Boole est une algèbre vérifiant les axiomes suivants :

- T et T' : Lois de composition interne
- T et T' commutatives
- T et T' associatives
- T et T' distributives l'une par rapport à l'autre
- T et T' possèdent un élément neutre (u pour T et n pour T').
- Chaque élément x de E possède un élément symétrique (noté /x)

1.2 Théorèmes de l'algèbre de Boole

T1 : Idempotence	$x T x = x$;	$x T' x = x$
T2 :	$x T n = n$;	$x T' u = u$
T3 : Absorption	$x T (x T' y) = x$;	$x T' (x T y) = x$
T4 : De Morgan	$\overline{x T' y} = \bar{x} T' \bar{y}$;	$\overline{x T y} = \bar{x} T \bar{y}$
T5 :	$\bar{\bar{u}} = u$;	$\bar{\bar{n}} = n$
T6 :	$\overline{\overline{x}} = x$		

1.2 Algèbre binaire

1.3.1 Définition

C'est une algèbre de Boole, dont l'ensemble E ne possède que deux éléments. Ces éléments ne peuvent être que u et n.

Une interprétation

- L'ensemble E représente les états d'un interrupteur (fermé, ouvert).
- L'opération T entre deux variables représente la mise en série des interrupteurs correspondants.
- L'opération T' sur deux variables représente la mise en parallèle des interrupteurs correspondants

1.3.2 Opérateur T

–Appellation: ET, AND, conjonction, produit logique

–Notation: rien, . , & , ^

On utilisera surtout le "." ou rien.

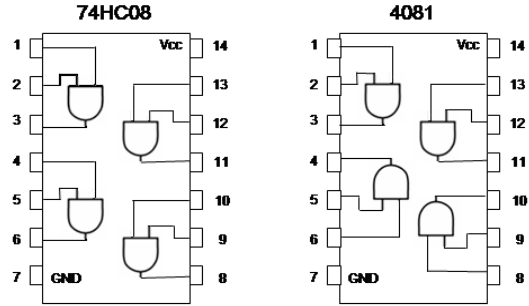
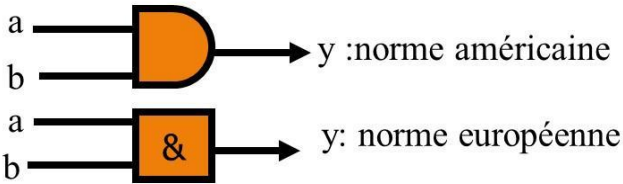
–Table des valeurs (table de vérité)

a	b	$y = a b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

–Circuit



- Symboles



1.3.3 Opérateur T'

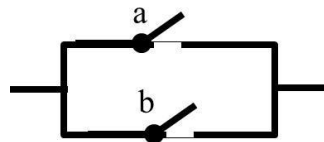
- Appellation : OU, OR, disjonction, somme logique

- Notation : $+$, \vee (On utilisera souvent "+")

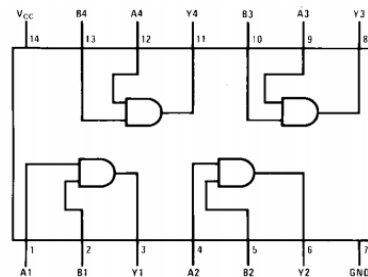
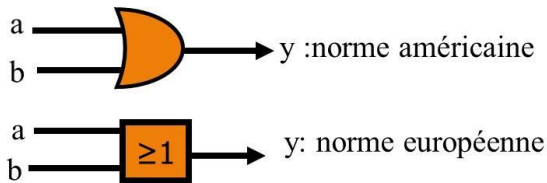
- Table des valeurs

a	b	$y = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Circuit



- Symboles



1.3.4 Opérateur OUI

- Appellation: Identité

- Expression: $y = a$

a	y
0	0
1	1

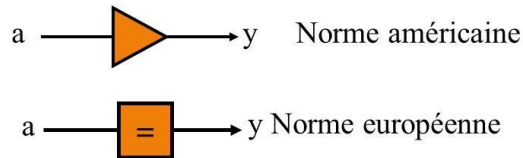
- Table des valeurs

- Circuit



Il s'agit d'un interrupteur normalement ouvert.

- Symboles



1.3.5 Opérateur NON

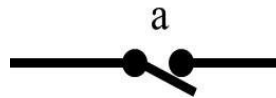
-Appellation : **PAS, NOT**, inversion, complémententation

-Expression : $y = \bar{a}$

-Table des valeurs

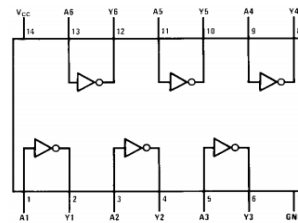
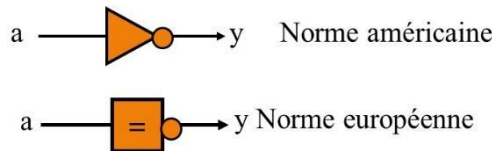
a	$y = \bar{a}$
0	1
1	0

-Circuit



Il s'agit d'un interrupteur normalement fermé.

- Symboles



1.3.6 Opérateurs composés

a- OU exclusif

✓ Appellation: **XOR**, antivalence

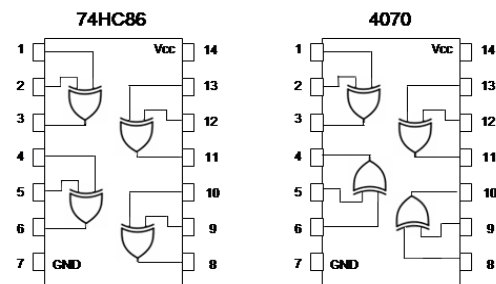
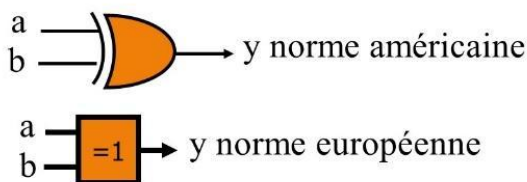
✓ Expression: $a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$

✓ Table des valeurs

a	b	$y = (a \oplus b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La sortie prend la valeur 1 uniquement lorsque les deux entrées sont différentes.

✓ Circuit



b- NOR exclusif

✓ Appellation: **NXOR**, équivalence

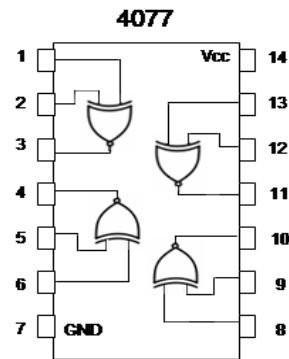
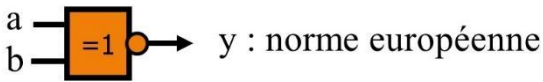
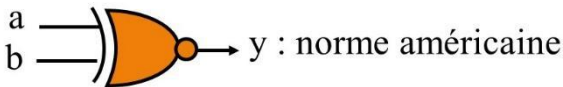
✓ Expression: $(a \equiv b) = \bar{a}\bar{b} + ab$

✓ Table des valeurs

a	b	$y = (a \equiv b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La sortie prend la valeur 1 uniquement lorsque les deux entrées sont égales.

✓ Circuit



c- NAND

✓ Appellation: **NON ET, NOT AND**

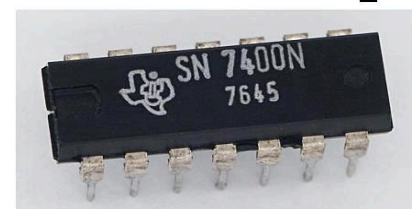
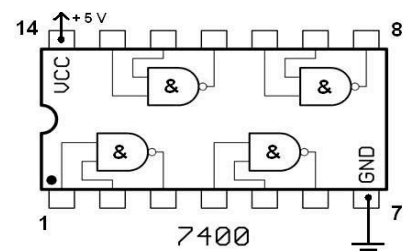
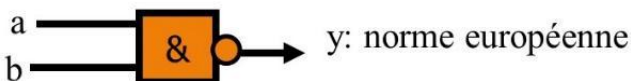
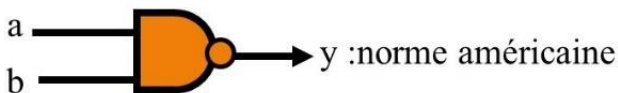
✓ Notation : |

✓ Expression: $a | b = \overline{ab}$

✓ Table des valeurs

a	b	$y = \overline{ab}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

✓ Circuit



d- NOR

✓ Appellation: **NON OU, NOT OR**

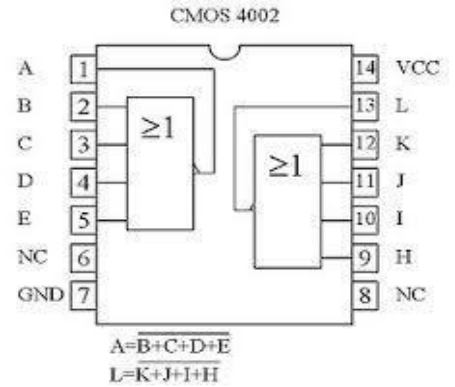
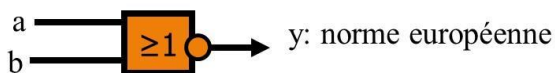
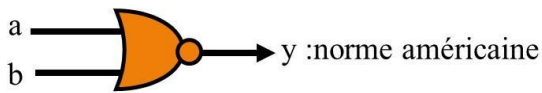
✓ Notation : ↓

✓ Expression: $(a \downarrow b) = \overline{(a + b)}$

✓ Table des valeurs

a	b	$y = \overline{a + b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

✓ Circuit



1.3.7 Expressions binaires

Ce sont des expressions construites à base des opérateurs élémentaires et composés vus précédemment.

Exemple

$$y = (a + b) (1 \oplus d) + \bar{c} (a + \bar{d} + \bar{e})$$

Règle de priorité

Priorité de AND devant OR.

1.3.8 Complémentation

–Règle de complémentation

1	0	x	\bar{x}	.	+	\equiv	\oplus
0	1	\bar{x}	x	+	.	\oplus	\equiv

–Règle de Shannon

En appliquant les règles de complémentation à une expression, on obtient son expression complémentaire (Règle de De Morgan généralisée).

-Exemple

Soit $y = (a + b) (1 \oplus d) + \bar{c} (a + \bar{d} + \bar{e})$; Chercher \bar{y} en appliquant la règle de Shannon.

Il faut commencer par mettre des parenthèses pour les produits figurant dans cette expression.

$$y = [(a + b) (1 \oplus d)] + [\bar{c} (a + \bar{d} + \bar{e})] \quad y = \left[(a + b) (1 \oplus d) \right] + [\bar{c} (a + \bar{d} + \bar{e})]$$

On obtient :

$$\bar{y} = [(\bar{a} \bar{b}) + (0 \equiv \bar{d})] [c + (\bar{a} d e)]$$

1.3.9 Résumé des axiomes et théorèmes de l'algèbre binaire

–Commutativité

$$a \cdot b = b \cdot a$$
$$a + b = b + a$$

–Associativité

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

–Distributivité

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

–Éléments neutres

$$a \cdot 1 = a \quad a + 0 = a$$
$$a \bar{a} = 0 \quad a + \bar{a} = 1$$
$$a \cdot 0 = 0 \quad a + 1 = 1$$

–Idempotence

$$a \cdot a = a$$
$$a + a = a$$

–Absorption

$$a \cdot (a + b) = a$$
$$a + (a \cdot b) = a$$

–Adsorption

$$a (\bar{a} + b) = a b$$
$$a + (\bar{a} b) = a + b$$

Consensus

$$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$$
$$(a + b)(\bar{a} + c) = (a c) + (\bar{a} c)$$

–De Morgan

$$\overline{(a b)} = \bar{a} + \bar{b}$$
$$\overline{(a + b)} = \bar{a} \bar{b}$$

Ces règles sont utiles pour manipuler les expressions et les fonctions binaires.

Exemples :

Simplifier

Simplifier :